



Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application aux machines asynchrones en mouvement

Pauline Ferrouillat

► To cite this version:

Pauline Ferrouillat. Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application aux machines asynchrones en mouvement. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAT124 . tel-01273012

HAL Id: tel-01273012

<https://theses.hal.science/tel-01273012>

Submitted on 11 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Génie Électrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Pauline FERROUILLAT

Thèse dirigée par **Gérard MEUNIER** et
co-encadrée par **Brahim RAMDANE** et **Christophe GUÉRIN**

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble**
dans l'**École Doctorale Électronique, Électrotechnique,**
Automatique & Traitement du Signal

Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application aux machines asynchrones en mouvement

Thèse soutenue publiquement le **8 décembre 2015**,
devant le jury composé de :

M. Noël BURAS

Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon (Président)

M. Zhuoxiang REN

Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie de Paris (Rapporteur)

M. Yvonnick LE MENACH

Maître de conférence HDR à l'Université des Sciences et Technologies de
Lille 1 (Rapporteur)

M. Ronan PERRUSSEL

Chargé de recherche CNRS à Toulouse (Membre)

M. Patrick DULAR

Directeur de recherche F.R.S.-FNRS à Liège (Membre)

M. Gérard MEUNIER

Directeur de recherche CNRS à Grenoble (Directeur de thèse)

M. Brahim RAMDANE

Maître de conférence à Grenoble-INP (Co-encadrant de thèse)

M. Christophe GUÉRIN

Docteur-Ingénieur à CEDRAT (Co-encadrant de thèse)



A Papy Laurent

Remerciements

Beaucoup de personnes ont contribué à la réussite de cette thèse. Je tiens à remercier toutes ces personnes qui ont permis de réaliser cette thèse.

J'aimerais remercier en premier le jury de ma soutenance de thèse de m'inciter à continuer la recherche en m'accordant mon doctorat.

Merci à mes rapporteurs, Yvonnick Le Menach et Zhuoxiang Ren, pour leur lecture assidue de mon long mémoire de thèse et pour leurs remarques très intéressantes.

Je remercie aussi Noël Burrais d'avoir accepté d'être le président de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier Ronan Perrussel d'avoir participé à mon jury de thèse et pour toutes les discussions intéressantes que l'on a eues.

Patrick Dular, je te remercie d'avoir accepté de faire parti de mon jury de thèse, et d'avoir pris le temps de travailler avec moi pour résoudre mes problèmes.

Je tiens à remercier ensuite mes encadrants de thèse, Gérard Meunier, Brahim Ramdane, Patrice Labie, Christophe Guérin et Delphine Dupuy, de m'avoir accordé leur confiance et de m'avoir aidé à réaliser cette thèse.

Je remercie notamment Gérard, mon directeur de thèse, pour sa gentillesse, son optimisme et son aide. Gérard, tu es un expert de la modélisation numérique en génie électrique et je te remercie de m'avoir transmis quelques unes de tes connaissances. J'ai apprécié de t'avoir comme directeur de thèse.

J'aimerais aussi remercier Brahim pour sa disponibilité et sa gentillesse. Brahim, tu as toujours été présent pour m'aider à surmonter les problèmes rencontrés lors de cette thèse.

Merci Christophe pour tous les moments que tu as passés à me transmettre ton savoir sur l'électromagnétisme, le code de Flux, les formulations, les éléments finis, les méthodes numériques... Christophe, l'expert de Flux, tu as su être disponible à tout moment, même pendant les moments où tu avais beaucoup de travail. Merci Christophe aussi de m'avoir permis de travailler avec Patrick Dular grâce à ton séjour à Liège.

Patrice, je te remercie pour les développements dans Flux que tu as réalisés. Sans toi, je n'aurais pas réussi à étudier le mouvement dans cette thèse.

Je remercie aussi Delphine d'avoir pris le temps de suivre mes travaux de thèse, toujours avec ta bonne humeur.

Je tiens aussi à remercier tous les employés des deux entités dans lesquelles j'ai travaillé, le G2Elab et CEDRAT. Je remercie tous les personnels administratifs (qui m'ont permis de résoudre les problèmes de paperasses), les services informatique (pour les câbles mis à disposition et les résolutions des petits tracas d'ordinateurs), les collègues de bureau et d'équipe (pour les discussions intéressantes partagées entre deux simulations), ceux avec qui j'ai partagé des repas (pour les moments de détente entre midi et deux)...

J'aimerais aussi remercier l'équipe OPLAT du G2Elab avec laquelle nous avons organisé des moments sympathiques pour le labo : Farshid, Olivier, Aurel, Xavier, Zaki, Vinh, Ahmed,

Manu et Aurélien. Je remercie aussi toutes les autres équipes OPLAT que j'ai connues pour l'animation faite au labo.

Je remercie aussi Laurence, la maîtresse de cérémonie du club de théâtre d'improvisation du G2Elab, et tous ces membres, Fabien, Manel, Gatien, Sylvie, Sylvianne, Damien, Audrey, Maël, Diandra, Maximin, Benjamin, Nils, Mylène, François et Olivier, pour tous ces bons moments passés ensemble le jeudi midi.

Je remercie aussi tous les doctorants avec qui j'ai partagé des moments précieux : Diego, Melissa, Douglas, Tiago, Jonathan, Lucas, Quentin, Xavier, Aurel, Farshid, Kalle, Julien, Lyubomir, Guilherme, Anthony, Vinh, Thomas, Olivier, Vincent, Lyes, Zaki, Quang, Nicolas, Trung, Thiago, Oussama, Quang, Vinicius, Bhargav...

Pour finir, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur soutien.

Je remercie André, Solange, Anthony et Aurore pour les bons moments de détente passés en Ardèche. Merci à Louise pour les moments de joie.

Je veux dire merci aussi à mes amis vinois de m'avoir permis de m'échapper de ma thèse pour passer des journées et des soirées pendant lesquelles le temps ne compte pas.

Les personnes que je tiens le plus à remercier sont mes parents. Ils m'ont donnés l'envie de faire des études et m'ont toujours soutenu dans mes choix. Je les remercie d'avoir cru en moi. Je remercie aussi mes deux frères, Baptiste et Gautier, d'avoir accepté et supporter les choix de leur grande sœur. J'aimerais aussi remercier mes grands-parents et toute la famille Ferrouillat pour leur soutien.

Pour finir, je remercie Aubin d'avoir accepté de venir travailler et vivre à Grenoble, d'avoir écouté mes problèmes, de m'avoir aidé à les résoudre, d'avoir partagé mes moments de joie, de m'avoir soutenu et supporté dans les pires et les bons moments, d'avoir partagé mon quotidien, d'avoir passé des bons moments avec moi... Merci Aubin pour tout !

Table des matières

Remerciements	5
Introduction générale	13
Partie I – État de l’art des formulations en potentiel vecteur magnétique	17
Introduction de la partie I	19
Chapitre 1 – Modélisation en électromagnétisme	21
1.1 Équations régissant l’électromagnétisme	22
1.1.1 Équations de Maxwell	22
1.1.2 Lois de comportement	22
1.1.3 Conditions aux limites	23
1.2 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnéto-	
tiques	25
1.2.1 Formulation en \mathbf{A}	25
1.2.2 Formulation en \mathbf{A}_r	26
1.3 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques	
transitoires	27
1.3.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$	28
1.3.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	28
1.4 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétohar-	
moniques	30
1.4.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$	30
1.4.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	31
Chapitre 2 – Modélisation avec les éléments finis	33
2.1 Modélisation continue	34
2.1.1 Espaces fonctionnels	34
2.1.2 Diagramme de Tonti	36
2.2 Modélisation discrète	38
2.2.1 Éléments finis	38
2.2.2 Espaces d’approximation	38
2.2.3 Éléments de référence et éléments réels	39

2.2.4	Fonctions de forme	41
Chapitre 3 – Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires		45
3.1	Formulations faibles	46
3.1.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	46
3.1.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	47
3.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	49
3.2.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	49
3.2.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	53
3.3	Résolution des formulations matricielles	55
3.3.1	Solveurs	55
3.3.2	Condition de jauge	57
Conclusion de la partie I		61
Partie II – Étude des termes sources pour les formulations en potentiel vecteur magnétique		63
Introduction de la partie II		65
Chapitre 4 – Termes sources des formulations en potentiel vecteur magnétique		67
4.1	Différents types de bobines	69
4.1.1	Bobines non maillées	69
4.1.2	Bobines maillées	70
4.1.3	Récapitulatif	70
4.2	Calcul des termes sources	71
4.2.1	Equations	71
4.2.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	74
4.3	Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires avec les termes sources	80
4.3.1	Formulations pour des problèmes magnétiques transitoires	80
4.3.2	Formulations faibles	81
4.3.3	Modélisation discrète avec les éléments finis	85
Chapitre 5 – Validations et résultats des termes sources		93
5.1	Encoche en magnétostatique	95
5.1.1	Description du problème	95
5.1.2	Avec une bobine non maillée	97
5.1.3	Avec une bobine maillée	101
5.1.4	Conclusion	102
5.2	Machine asynchrone en magnétoharmonique	105
5.2.1	Description du problème	105
5.2.2	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}	107
5.2.3	Couple et pertes par effet Joule	109
5.2.4	Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur	109
5.2.5	Récapitulatif	111
5.3	Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire	112
5.3.1	Description du problème	112

5.3.2	Couple	115
5.3.3	Flux magnétique	116
5.3.4	Induction magnétique \mathbf{B} en un point	119
5.3.5	Temps de calcul du solveur	120
5.3.6	Dualité des formulations	121
5.4	Conclusion	125
Chapitre 6 – Termes sources sur un domaine réduit des formulations en potentiel vecteur magnétique		127
6.1	Calcul des termes sources sur un domaine réduit	129
6.1.1	\mathbf{H}_j pour des bobines maillées, la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme $d'\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	130
6.1.2	\mathbf{A}_j pour des bobines non maillées, la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme $d'\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	130
6.2	Formulations en potentiel vecteur magnétique en magnétique transitoire avec les termes sources sur un domaine réduit	132
6.2.1	Formulations faibles	132
6.2.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	133
6.3	Validations et résultats des termes sources sur un domaine réduit	137
6.3.1	Tore en magnétoharmonique	137
6.3.2	Machine asynchrone en magnétoharmonique	143
6.3.3	Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire	147
6.3.4	Conclusion	152
Conclusion de la partie II		155
Partie III – Prise en compte du mouvement pour les formulations en potentiel vecteur magnétique		157
Introduction de la partie III		159
Chapitre 7 – État de l'art des méthodes de prise en compte du mouvement		161
7.1	Référentiels d'étude	162
7.1.1	Méthode Eulérienne	162
7.1.2	Méthode Lagrangienne	163
7.2	Méthodes basées sur un entrefer volumique	165
7.2.1	Remaillage	165
7.2.2	Macro-élément	167
7.2.3	Couplage avec les intégrales de frontière	168
7.2.4	Overlapping	169
7.3	Méthodes basées sur une surface de glissement	171
7.3.1	Pas bloqué	171
7.3.2	Multiplicateurs de Lagrange	172
7.3.3	Interpolation	173
7.3.4	Éléments avec joints	174
7.4	Conclusion	176
Chapitre 8 – Méthode des éléments avec joints		179
8.1	Description de la méthode des éléments avec joints	180

8.1.1	Matrices de couplage	180
8.1.2	Système matriciel à résoudre avec les matrices de couplage	185
8.2	Implémentation de la méthode des éléments avec joints	187
8.2.1	Domaine d'intégration des matrices de couplage	187
8.2.2	Intégration des termes des matrices de couplage	188
8.2.3	Inversion de la matrice de couplage C	192
8.2.4	Conclusion	196
Chapitre 9 – Application de la méthode des éléments avec joints à des formulations 2D		197
9.1	Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D magnétostatique en éléments nodaux	199
9.1.1	Description du problème	199
9.1.2	Couple	203
9.1.3	Flux magnétique	204
9.1.4	Induction magnétique \mathbf{B} en un point	205
9.1.5	Récapitulatif	205
9.2	Machine en 2D magnétique transitoire en éléments nodaux et d'arête	206
9.2.1	Description du problème	206
9.2.2	Induction magnétique \mathbf{B} et densité de courant \mathbf{J}_e	211
9.3	Conclusion	217
Conclusion de la partie III		221
Conclusion générale		223
Annexes		227
Annexe A Notions mathématiques appliquées au génie électrique		229
A.1	Topologie	230
A.1.1	Connexité	230
A.1.2	Simple connexité	230
A.1.3	Ensemble ouvert ou fermé	231
A.2	Opérateurs différentiels	232
A.2.1	Compositions d'opérateurs différentiels	232
A.2.2	Compositions des champs dans les opérateurs différentiels	234
A.2.3	Théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski	235
A.2.4	Formules de Green	235
A.2.5	Conditions aux limites déduites des espaces fonctionnels des opérateurs différentiels	237
A.3	Loi de Biot et Savart	239
Annexe B θ-schémas et méthode d'Euler		241
B.1	θ -schémas et méthode d'Euler	242
B.1.1	Problème à résoudre	242
B.1.2	θ -schémas	242
B.2	Étude des θ -schémas	244
B.2.1	Stabilité (faible sensibilité aux erreurs)	244
B.2.2	Consistance (annulation de la somme des erreurs avec Δt)	244

B.2.3	Convergence	245
B.2.4	Ordre de convergence	245
B.2.5	Stabilité numérique	245
Annexe C	Méthode de Newton-Raphson	247
C.1	Méthode de Newton-Raphson	248
C.1.1	Problème à résoudre	248
C.1.2	A chaque itération	248
C.1.3	Critère d'arrêt	249
C.2	Étude de la méthode de Newton-Raphson	250
C.2.1	Convergence	250
C.2.2	Ordre de convergence	250
Annexe D	Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétostatiques et magnétoharmoniques	251
D.1	Formulations pour des problèmes magnétostatiques	252
D.1.1	Formulations faibles	252
D.1.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	253
D.2	Formulations pour des problèmes magnétoharmoniques	256
D.2.1	Formulations faibles	256
D.2.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	257
Bibliographie		261
Résumé / Abstract		270

Introduction générale

Avec le développement de la traction et de l'actionnement électrique dans l'industrie de l'automobile, des transports et de l'aéronautique, les besoins en conception des machines électriques sont en constante évolution. Dans ces systèmes, l'efficacité énergétique de la conversion électromécanique est un critère particulièrement important : 30% de l'énergie électrique consommée est due à l'industrie, dont 60% est due aux moteurs électriques [Perrat, 2010].

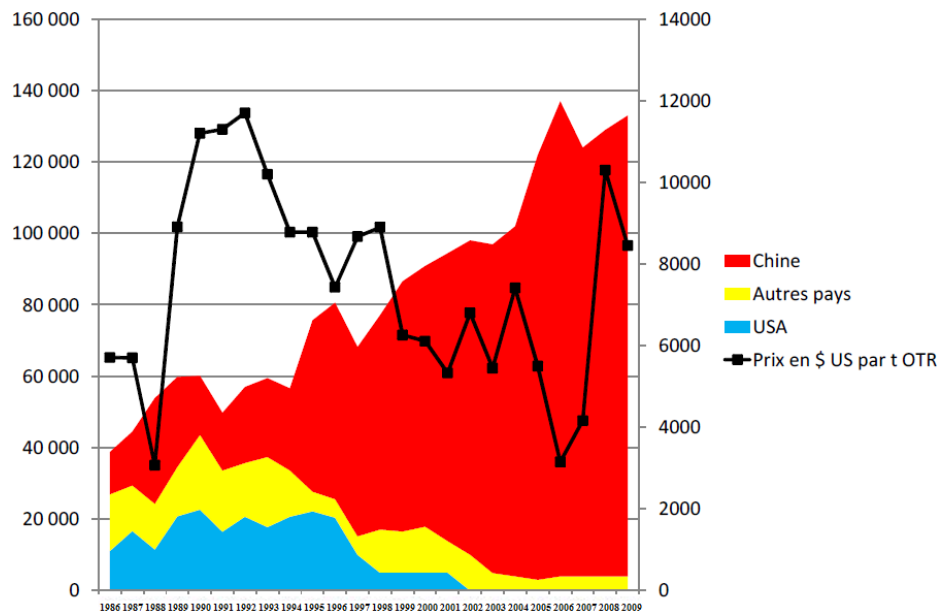


FIGURE 1 – Évolution de la production mondiale en tonnes (échelle de gauche) et du prix annuel moyen en dollars par tonne (échelle de droite) des oxydes de terres rares [Christmann, 2011]

Il existe différents types de machines électriques : des machines axiales, des machines à griffes, des machines synchrones à aimants permanents, des machines asynchrones, etc. Les aimants permanents des machines synchrones sont constitués d'oxydes de terres rares, en général du néodyme. D'après la figure 1, la production de terres rares de la Chine, utiles aux aimants permanents des machines synchrones, s'est développée au milieu des années 1990 et a fait considérablement baisser les prix des aimants [Christmann, 2011]. Cette baisse de prix a affecté les concurrents de la Chine comme les États-Unis et a permis à la Chine d'obtenir le monopole de la production des terres rares, rentrant dans la constitution des aimants permanents. Le monopole chinois sur la production des terres rares a entraîné une hausse du prix des terres rares et en particulier du néodyme, visible sur la figure 2. Les augmentations de prix sont aussi dues à la forte croissance de la demande et aux restrictions à l'exportation mises en place par la Chine. Ces hausses de prix induisent une augmentation du prix des machines synchrones à aimants permanents, utilisant des terres rares pour leurs aimants permanents.

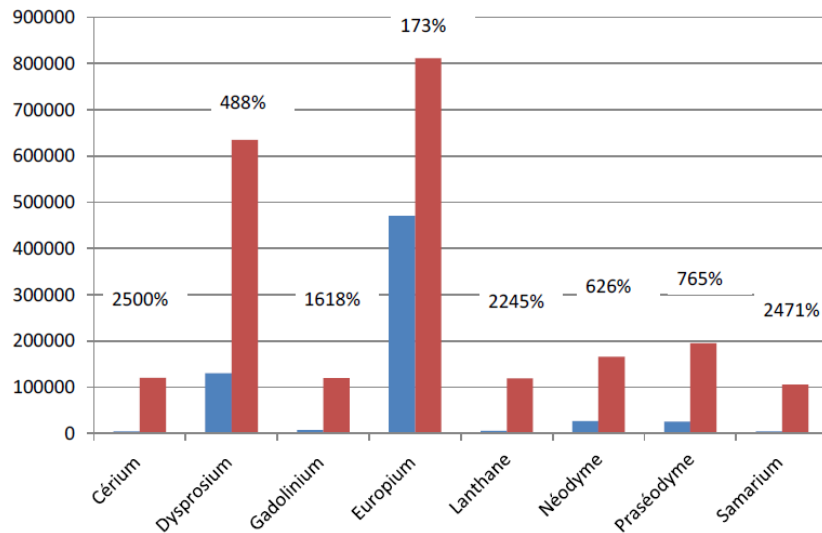


FIGURE 2 – Évolution du prix d'oxydes de terres rares 99,9% de pureté, prix FOB Chine, entre le 31/03/2010 et le 31/03/2011 [Christmann, 2011]

La machine asynchrone ne possède pas d'aimants permanents, donc son prix ne dépend pas de celui des terres rares. Elle est donc moins chère à fabriquer [Goudier, 2013]. Le principe de fonctionnement des moteurs asynchrones est différent des moteurs synchrones bien qu'il exploite le même champ tournant. Le rotor ne tourne pas en synchronisme avec le champ magnétique, il tourne moins vite, on dit qu'il est asynchrone. Le moteur asynchrone ou moteur à induction comprend un stator avec un bobinage polyphasé dans une carcasse constituée de matériau magnétique et d'un rotor, lui aussi en matériau magnétique, dans lequel sont logés des conducteurs en court-circuit [Perrat, 2010]. La figure 3 illustre de manière simplifiée la constitution de ce moteur. Les avantages de la machine asynchrone sont qu'elle est facile à fabriquer [Multon *et al.*, 2000] et moins chère que la machine synchrone à aimants permanents. Les inconvénients de la machine asynchrone sont qu'il faut un courant de démarrage important et qu'elle a des pertes Joule importantes au rotor (ce qui nécessite une bonne ventilation au rotor) [Perrat, 2010].

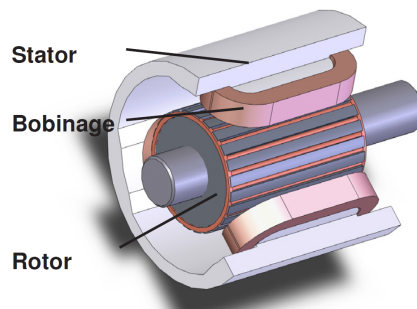


FIGURE 3 – Constitution d'une machine asynchrone

La modélisation des machines asynchrones nécessite des simulations 3D. Celles-ci doivent permettre d'évaluer efficacement les pertes par courant de Foucault dans la machine, en prenant en compte le mouvement du rotor. Les outils de modélisation basés sur la méthode des éléments finis sont alors essentiels pour la conception des machines, afin d'en prédire de manière précise les performances et d'en optimiser le rendement (20 à 30% de réduction envisa-

geable [Perrat, 2010]). Un solveur éléments finis est basé sur des formulations mathématiques permettant de modéliser les phénomènes physiques. Dans le logiciel Flux[®], des formulations basées sur le potentiel scalaire magnétique ont été développées et sont utilisées avec succès depuis de nombreuses années pour la modélisation des dispositifs en 3D [Le Floch, 2002]. Elles permettent d'utiliser une seule inconnue dans l'air et de mettre en place un couplage avec les équations du circuit électrique. De plus, l'utilisation du potentiel scalaire magnétique nodal permet de simplifier la mise en œuvre du raccordement de la solution éléments finis entre les parties fixes et mobiles au niveau d'un cylindre de glissement [Perrin-Bit, 1994]. Néanmoins, un inconvénient majeur de cette méthode est la nécessité de gérer les problèmes de connexité, induits par l'utilisation du potentiel scalaire magnétique [Rodger et Eastham, 1987]–[Vérité, 1987]. Une solution consiste à introduire des coupures mathématiques artificielles, solution qui est souvent difficile à mettre en œuvre par l'utilisateur [Phung, 2006].

Afin de se libérer de ces contraintes de connexité, il est proposé de travailler sur des formulations en potentiel vecteur magnétique [Biro *et al.*, 1996]. En 3D, leur mise en œuvre nécessite l'utilisation d'éléments d'arête afin de respecter la nature des champs. La performance des machines ainsi que les techniques actuelles de résolution des systèmes matriciels doivent permettre de compenser le coût et les difficultés de convergence liées à l'utilisation des éléments d'arête. Le challenge technique est d'effectuer pour ces formulations le raccordement de maillage dû aux parties du maillage en mouvement. Le couplage de ces formulations avec les équations de circuit électrique ne sera pas réalisé durant cette thèse.

Le but de cette thèse sera donc de développer des formulations en potentiel vecteur magnétique pour les machines asynchrones et de prendre en compte le mouvement de ces machines.

Dans la première partie du travail de thèse, des formulations électriques, ou formulations en $\mathbf{A} - V$, seront développées. Elles devront naturellement se baser sur l'utilisation des éléments d'arête pour interpoler le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et sur une interpolation nodale pour le potentiel scalaire électrique V , nécessaire dans les conducteurs massifs.

Dans la deuxième partie, les termes sources pour des bobines maillées ou non seront étudiés et validés pour ces formulations en potentiel vecteur magnétique. Pour des bobines maillées et des bobines non maillées, les sources seront projetées et stockées sur le maillage avec les éléments finis d'arête pour éviter de les recalculer à chaque pas de temps. Puis, les termes sources seront calculés sur un domaine réduit, fixe ou en mouvement et comprenant les bobines, pour pouvoir prendre en compte le mouvement et éviter d'imposer la continuité des sources à l'interface entre les domaines fixe et mobile.

Avec les formulations en potentiel scalaire magnétique, la prise en compte du mouvement s'effectuant dans l'air, l'interpolation est réalisée sur le potentiel scalaire magnétique et ne nécessite donc qu'une interpolation nodale relativement simple à mettre en œuvre. Avec les éléments d'arête l'interpolation est plus délicate. Dans cette troisième partie, une méthode générale de prise en compte du mouvement sera mise au point, en s'appuyant sur les méthodes récentes permettant la résolution des équations aux dérivées partielles sur des maillages non-conformes [Rapetti, 2000].

Ce travail de thèse conduira à des développements informatiques dans le logiciel Flux[®] [Flux, 2015], co-développé par CEDRAT [CEDRAT, 2015] et le G2ELab [G2Elab, 2015].

PARTIE I

État de l'art des formulations en potentiel vecteur magnétique

Introduction de la partie I

Le but de cette première partie est de développer des formulations en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique en trois dimensions à l'aide de la méthode des éléments finis pour le logiciel Flux[®], puisque ce logiciel est actuellement basé sur l'utilisation de formulations en potentiel scalaire magnétique et en potentiel vecteur électrique [Le Floch, 2002]. Cependant, le potentiel scalaire magnétique induit des problèmes lorsque le domaine d'étude n'est pas simplement connexe (défini dans l'annexe A.1.2), qui peuvent être résolus par l'introduction de coupures mathématiques artificielles [Phung, 2006]. Ces coupures sont difficiles à mettre en œuvre par l'utilisateur. Des formulations en potentiel vecteur magnétique [Biro *et al.*, 1996] seront donc développées pour ne pas avoir à introduire de coupures artificielles dans les dispositifs qui ne sont pas simplement connexes.

Dans le premier chapitre, les équations de Maxwell régissant l'électromagnétisme seront rappelées. A partir de ces équations, des formulations en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et en potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r seront décrites sous la forme d'équations aux dérivées partielles pour des problèmes en régime statique (phénomènes indépendants du temps), en régime transitoire (phénomènes dépendants du temps) et en régime harmonique (phénomènes dépendants du temps avec des alimentations sinusoïdales).

Dans le deuxième chapitre, la modélisation avec les éléments finis sera étudiée. Tout d'abord, la modélisation continue sera décrite : c'est-à-dire les espaces correspondant aux grandeurs et aux opérateurs différentiels (gradient, rotationnel et divergence), ainsi que le diagramme de Tonti référençant les équations et les espaces correspondant à chaque grandeur. Ensuite, la modélisation discrète sera étudiée grâce à la méthode des éléments finis. Les espaces d'approximation des grandeurs sur le maillage et les éléments de Whitney permettant d'obtenir les fonctions de forme seront aussi décrits.

Dans le troisième chapitre, la modélisation discrète sera appliquée en régime transitoire aux formulations en potentiel vecteur magnétique réduit ou non. Tout d'abord, les formulations faibles en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ seront décrites. Puis, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ auxquelles la méthode des éléments finis aura été appliquée seront détaillées. Enfin, la convergence de ces formulations sera étudiée : en particulier, les conditions de jauge permettant de faire converger les formulations, mais aussi la convergence des systèmes sans condition de jauge.

Chapitre 1

Modélisation en électromagnétisme

Sommaire

1.1	Équations régissant l'électromagnétisme	22
1.1.1	Équations de Maxwell	22
1.1.2	Lois de comportement	22
1.1.3	Conditions aux limites	23
1.1.3.1	Conditions aux limites homogènes	23
1.1.3.2	Conditions d'interface	23
1.1.3.3	Conditions globales	24
1.2	Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétostatiques	25
1.2.1	Formulation en \mathbf{A}	25
1.2.2	Formulation en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}}$	26
1.3	Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires	27
1.3.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	28
1.3.2	Formulation en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$	28
1.4	Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétoharmoniques	30
1.4.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	30
1.4.2	Formulation en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$	31

1.1 Équations régissant l'électromagnétisme

1.1.1 Équations de Maxwell

L'*électromagnétisme* est l'étude des interactions entre les particules dotées d'une charge électrique. Les postulats de base de l'électromagnétisme sont les équations de Maxwell. Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissent l'électromagnétisme telles que [Fournet, 1985]-[Vassallo, 1980] :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{Maxwell-Ampère}, \quad (1.1a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{Maxwell-Faraday}, \quad (1.1b)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{Maxwell-Thomson}, \quad (1.1c)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_V, \quad \text{Maxwell-Gauss}, \quad (1.1d)$$

avec

- \mathbf{H} le *champ magnétique* (en A.m^{-1}),
- \mathbf{B} l'*induction magnétique* (en T),
- \mathbf{E} le *champ électrique* (en V.m^{-1}),
- \mathbf{D} l'*induction électrique* (en C.m^{-2}),
- \mathbf{J}_e la *densité de courant des conducteurs massifs* (en A.m^{-2}),
- \mathbf{J}_s la *densité de courant des conducteurs bobinés* (en A.m^{-2}),
- ρ_V la *densité volumique de charge électrique* (en C.m^{-3}).

Des équations (1.1a) et (1.1d) découlent l'équation de conservation de la charge tel que :

$$\text{div } (\mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s) = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Dans la prochaine sous-section, les lois de comportement, permettant de relier les variables entre elles, seront définies.

1.1.2 Lois de comportement

Dans la suite, les matériaux considérés seront ferromagnétiques. Les propriétés de la matière sont exprimées par les *lois de comportement* telles que [Vassallo, 1980] :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \text{ ou } \mathbf{H} = \nu (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r), \quad \text{Loi de comportement magnétique}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \text{ ou } \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}_e, \quad \text{Loi d'Ohm locale sans mouvement}, \quad (1.3b)$$

avec

- μ la *perméabilité magnétique* (en H.m^{-1}),
- \mathbf{B}_r l'*induction magnétique rémanente* due aux aimants permanents (en T),
- $\nu = \frac{1}{\mu}$ la *réductivité magnétique* (en $\text{H}^{-1}.\text{m}$),
- ρ la *résistivité électrique* (en $\Omega.\text{m}$),
- $\sigma = \frac{1}{\rho}$ la *conductivité électrique* (en $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$).

Dans la prochaine sous-section, les conditions aux limites des grandeurs magnétiques et électriques seront définies sur le bord du domaine d'étude.

1.1.3 Conditions aux limites

Soit Ω le *domaine d'étude* des équations de Maxwell (1.1) et des lois de comportement (1.3) et Γ la *frontière* de Ω .

En plus des équations de Maxwell et des lois de comportement, il est nécessaire de définir des conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine d'étude Ω , pour obtenir une solution unique au problème.

1.1.3.1 Conditions aux limites homogènes

Les *conditions aux limites homogènes* des grandeurs magnétiques sur des portions complémentaires de surface Γ_h et Γ_b de Γ (avec $\Gamma_h \cup \Gamma_b = \Gamma$ et $\Gamma_h \cap \Gamma_b = \emptyset$) sont telles que :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\Gamma_b} = 0, \quad (1.4b)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Γ et orienté vers l'extérieur de Ω .

La condition à la limite (1.4a) signifie que le champ magnétique \mathbf{H} est normal à la surface Γ_h et que sa composante tangentielle est nulle. De façon similaire, la condition à la limite (1.4b) indique que l'induction magnétique \mathbf{B} est tangente à la surface Γ_b , puisque \mathbf{B} a une composante normale nulle.

Les conditions aux limites homogènes des grandeurs électriques sur des portions complémentaires de surface Γ_e et Γ_j de Γ (avec $\Gamma_e \cup \Gamma_j = \Gamma$ et $\Gamma_e \cap \Gamma_j = \emptyset$) sont telles que :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_e|_{\Gamma_j} = 0. \quad (1.5b)$$

Les conditions aux limites homogènes sur les grandeurs magnétiques et électriques ont été définies. Seulement une des deux conditions aux limites (1.4) et une des deux conditions aux limites (1.5) s'appliquent sur le bord du domaine Γ ou sur les plans de symétrie. Dans le prochain paragraphe, les conditions aux limites à l'interface entre deux domaines différents seront étudiées.

1.1.3.2 Conditions d'interface

Lors du passage d'un milieu à un autre, les champs électromagnétiques subissent des discontinuités et donc, ne sont pas différentiables. Cependant, il est possible de définir des conditions appelées *conditions de transmission des champs* ou *conditions d'interface* qui permettent d'obtenir des champs électromagnétiques continus au passage d'un milieu à un autre.

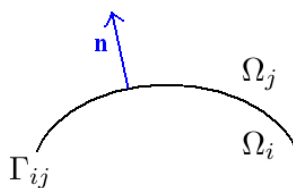


FIGURE 1.1 – Interface entre deux milieux différents

Considérons l'interface Γ_{ij} de normal \mathbf{n} entre deux domaines Ω_i et Ω_j , représentée sur la figure 1.1. Les champs seront désignés avec un indice i et j dans leurs domaines respectifs Ω_i et Ω_j . Les conditions d'interfaces [Dautray et Lions, 1987a] sont obtenues, à partir des équations de Maxwell (1.1) et des théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski (A.8)-(A.9) (donnés dans l'annexe A.2.3), telles que :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_j)|_{\Gamma_{ij}} = \mathbf{J}_s, \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j)|_{\Gamma_{ij}} = \mathbf{0}, \quad (1.6b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j)|_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad (1.6c)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{ei} - \mathbf{J}_{ej})|_{\Gamma_{ij}} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}, \quad (1.6d)$$

avec ρ_S la *densité surfacique de charge* (en C.m⁻²).

Avec ces conditions d'interface (1.6), les composantes normales de \mathbf{B} et \mathbf{J}_e et les composantes tangentielles d' \mathbf{H} et \mathbf{E} sont continues à travers l'interface Γ_{ij} .

Dans ce paragraphe, les conditions d'interface ont été étudiées. Dans le prochain paragraphe, les conditions globales sur les grandeurs magnétiques et électriques seront décrites. Ces conditions permettent entre autre d'imposer le courant ou la tension.

1.1.3.3 Conditions globales

Les *conditions globales* sur les champs sont imposées en plus des conditions locales précédentes (1.4), (1.5) et (1.6). Ces conditions sont soit des *circulations*, soit des *flux*. Soit Γ la frontière du domaine d'étude Ω . Les conditions sur les flux sont telles que :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_e dS = I, \quad (1.7a)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS = \psi, \quad (1.7b)$$

avec

- \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Γ et orienté vers l'extérieur de Ω ,
- I l'*intensité du courant* dans Ω (en A),
- ψ le *flux magnétique* dans Ω (en Wb),
- dS une surface infinitésimale de Γ (en m²).

Soit γ une courbe appartenant au domaine Ω . Les conditions sur les circulations sont telles que :

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V, \quad (1.8a)$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \phi, \quad (1.8b)$$

avec

- V la *force électromotrice* dans Ω (en V),
- ϕ la *force magnétomotrice* dans Ω (en A),
- $d\mathbf{l}$ un déplacement infinitésimal le long de la courbe γ (en m).

Dans les prochaines sections, les différents modèles représentant les phénomènes physiques de l'électromagnétisme seront étudiés [Golovanov, 1997]. Ces modèles sont construits à partir des équations de Maxwell (1.1), des lois de comportement (1.3) et des conditions aux limites homogènes (1.4)-(1.5).

1.2 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétostatiques

La *magnétostatique* est l'étude des phénomènes magnétiques en régime statique. En *ré-gime statique* signifie que les phénomènes sont considérés indépendants du temps. Le champ magnétique \mathbf{H} est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'à des courants stationnaires imposés par la densité de courant \mathbf{J}_s ou à l'induction rémanente des aimants \mathbf{B}_r . Le domaine de définition des problèmes magnétostatiques est représenté sur la figure 1.2. Le modèle magnétostatique du domaine d'étude Ω et de frontière $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$ est constitué des équations de Maxwell (1.1a) dont la dérivée temporelle est annulée, ainsi que des équations (1.1c) et (1.2) (sans la dérivée temporelle et sans \mathbf{J}_e puisqu'il n'y a pas de régions conductrices), de la loi de comportement (1.3a) et des conditions aux limites (1.4a) et (1.4b) tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \quad (1.9a)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.9b)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{J}_s = 0, \quad (1.9c)$$

$$\mathbf{H} = \nu (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r), \quad (1.9d)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.9e)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\Gamma_b} = 0. \quad (1.9f)$$

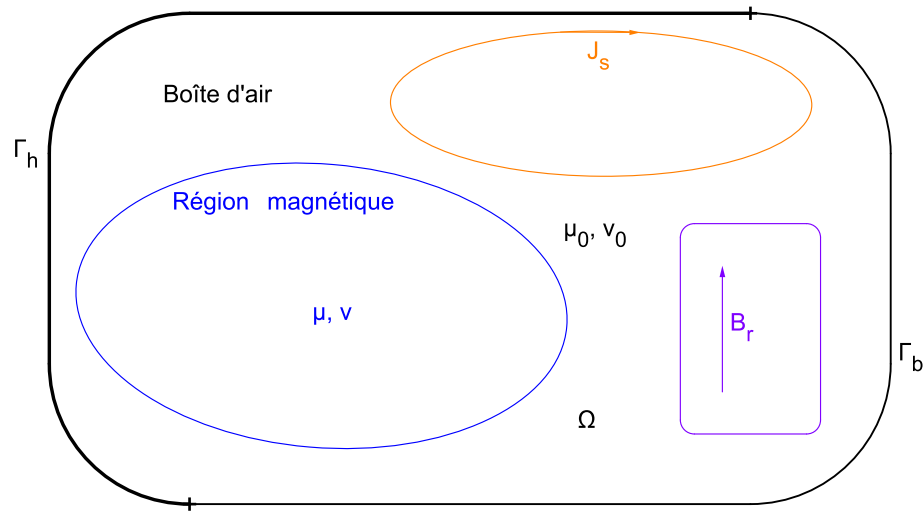


FIGURE 1.2 – Définition du domaine d'un problème magnétostatique

A partir des équations du modèle magnétostatique (1.9), des potentiels vecteurs en seront déduits, pour obtenir plusieurs formulations résolvant le modèle magnétostatique (1.9). Seulement quelques formulations en potentiel vecteur seront présentées dans les prochaines sous-sections, plus de formulations sont données dans les articles [Biro et Preis, 1989]-[Biro *et al.*, 1990].

1.2.1 Formulation en \mathbf{A}

Le *potentiel vecteur magnétique* \mathbf{A} (en T.m) est introduit, à partir de l'équation (1.9b), tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}, \quad (1.10)$$

parce que la divergence d'un rotationnel est nulle (A.2) d'après le théorème de Schwarz (voir l'annexe A.2.1.2).

La *formulation en potentiel vecteur magnétique*, ou *formulation en \mathbf{A}* , de la magnétostatique est définie, grâce aux équations du modèle magnétostatique (1.9a), (1.9d), (1.9e) et (1.9f) et de la définition du potentiel vecteur magnétique (1.10), telle que [Biro *et al.*, 1996]-[Preis *et al.*, 1992] :

$$\mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s + \mathbf{rot} (\nu \mathbf{B}_r), \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.11b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}. \quad (1.11c)$$

Dans la prochaine sous-section, une autre formulation en potentiel vecteur magnétique sera décrite.

1.2.2 Formulation en \mathbf{A}_r

Le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} peut être décomposé en deux parties \mathbf{A}_s et \mathbf{A}_r tel que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_s, \quad (1.12)$$

avec

- \mathbf{A}_r le *potentiel vecteur magnétique réduit* (en T.m),
- \mathbf{A}_s le *potentiel vecteur magnétique source* (en T.m).

Le potentiel vecteur \mathbf{A}_s représente l'influence des sources de courant en l'absence de régions magnétiques (par exemple, d'une bobine), alors que le potentiel \mathbf{A}_r est associé aux régions magnétiques (par exemple, une région ferromagnétique).

D'après la définition des potentiels vecteurs \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12) et de la relation entre \mathbf{B} et \mathbf{A} (1.10), l'induction magnétique \mathbf{B} est définie à partir d' \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s telle que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}_r + \mathbf{rot} \mathbf{A}_s. \quad (1.13)$$

La *formulation en potentiel vecteur magnétique réduit*, ou *formulation en \mathbf{A}_r* , de la magnétostatique est définie, en remplaçant \mathbf{A} par \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12) dans la formulation en \mathbf{A} (1.11), telle que [Biro *et al.*, 1999] :

$$\mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_r) = \mathbf{J}_s + \mathbf{rot} (\nu (\mathbf{B}_r - \mathbf{rot} \mathbf{A}_s)), \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_r|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.14b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}_r|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}. \quad (1.14c)$$

Dans cette section, les formulations en potentiels vecteurs ont été étudiées en magnétostatique. Dans les prochaines sections, les formulations en potentiels vecteurs seront décrites pour des phénomènes dépendants du temps.

1.3 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires

La *magnétodynamique* étudie les phénomènes magnétiques en régime instationnaire. En *régime instationnaire* signifie que les phénomènes sont considérés dépendants du temps.

Ici, la *magnétique transitoire* est étudiée : elle est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint l'état stable du *régime permanent*, i.e. un régime périodique ou indépendant du temps. En régime transitoire, les dérivées en temps sont approximées par la méthode d'Euler, décrite dans l'annexe B. Comme représenté sur la figure 1.3, le problème à résoudre en magnétique transitoire comporte une boîte d'air (μ_0) modélisant l'infini, une région magnétique non conductrice ($\mu, \sigma = 0$), une région magnétique conductrice ($\mu, \sigma \neq 0$), des bobines (\mathbf{J}_s) et des aimants (\mathbf{B}_r). Le modèle magnétique transitoire du domaine d'étude Ω et de frontière $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_e$ est constitué des équations de Maxwell (1.1a) où le courant de déplacement $\partial_t \mathbf{D}$ est négligé, (1.1b) et (1.1c), de l'équation de conservation de la charge (1.2) où la densité volumique de charge électrique est négligée, des lois de comportements (1.3a) et (1.3b) et des conditions aux limites (1.4a) et (1.5a) tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s, \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.15b)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.15c)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{J}_e = 0, \quad (1.15d)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{J}_s = 0, \quad (1.15e)$$

$$\mathbf{H} = \nu (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r), \quad (1.15f)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.15g)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.15h)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}. \quad (1.15i)$$

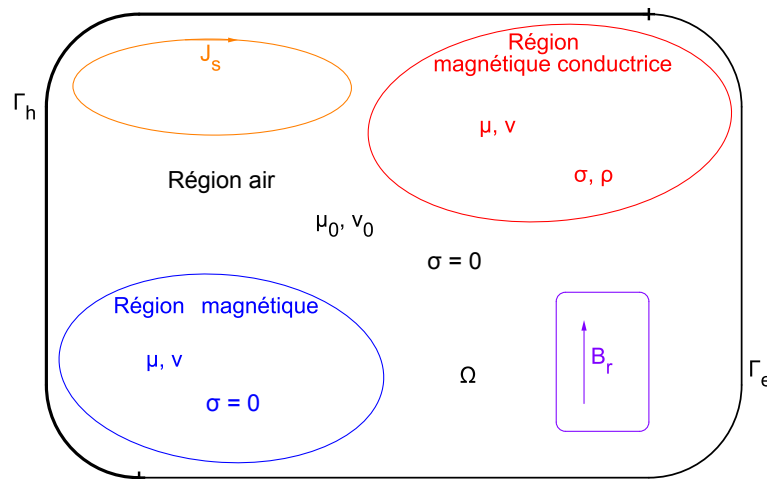


FIGURE 1.3 – Définition du domaine d'un problème magnétodynamique

La condition à la limite homogène $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_e|_{\Gamma_h} = 0$ (1.5b) peut être déduite de la condition à la limite sur \mathbf{H} (1.15h), à l'aide des équations (1.15a) et (A.14) (démontrée dans l'annexe A.2.5.2). De la même façon, la condition à la limite $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|_{\Gamma_e} = 0$ (1.4b) peut être déduite de la condition à la limite sur \mathbf{E} (1.15i), à l'aide des équations (1.15b) et (A.14).

1.3.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

Lorsque la région étudiée est conductrice ($\sigma \neq 0$), le *potentiel scalaire électrique* V (en V) est défini à partir de l'équation de Maxwell (1.15b) et de la définition du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (1.10) tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} V, \quad (1.16)$$

en sachant que le rotationnel d'un gradient est toujours nul dans un domaine Ω simplement connexe d'après l'équation (A.1) déduite du lemme de Poincaré (voir l'annexe A.2.1.1). Donc, le potentiel scalaire électrique V est défini seulement dans la région magnétique conductrice de la figure 1.3, alors que le potentiel vecteur magnétique est défini dans toutes les régions du domaine Ω .

La *formulation en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique*, ou *formulation en $\mathbf{A} - V$* , de la magnétique transitoire est définie, grâce aux équations du modèle magnétique transitoire (1.15a), (1.15d), (1.15f), (1.15g), (1.15h) et (1.15i) et des définitions du potentiel vecteur magnétique (1.10) et du potentiel scalaire électrique (1.16), telle que :

$$\mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) = \mathbf{J}_s + \mathbf{rot} (\nu \mathbf{B}_r), \quad (1.17a)$$

$$\mathbf{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) \right) = 0, \quad (1.17b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.17c)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (1.17d)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V|_{\Gamma_h} = 0, \quad (1.17e)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0. \quad (1.17f)$$

Le potentiel scalaire V , défini par la relation (1.16), n'est pas unique. Il est donc nécessaire d'imposer une contrainte sur V pour avoir une solution unique. Dans la pratique, l'unicité de la solution est obtenue, grâce à la condition à la limite (1.17f), en imposant une valeur nulle du potentiel V sur le bord Γ_e .

Dans la prochaine sous-section, la formulation de la magnétique transitoire étudiée sera celle en potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r .

1.3.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

La *formulation en potentiel vecteur magnétique réduit et en potentiel scalaire électrique*, ou *formulation en $\mathbf{A}_r - V$* , de la magnétique transitoire est définie, en remplaçant \mathbf{A} par \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12) dans la formulation en $\mathbf{A} - V$ (1.17), telle que :

$$\mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_r) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) = \mathbf{J}_s + \mathbf{rot} (\nu (\mathbf{B}_r - \mathbf{rot} \mathbf{A}_s)) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \quad (1.18a)$$

$$\mathbf{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) \right) = -\mathbf{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), \quad (1.18b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_r|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.18c)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}_r|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (1.18d)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V|_{\Gamma_h} = 0, \quad (1.18e)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0. \quad (1.18f)$$

1.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES

Comme pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ (1.17), l'unicité du potentiel V est obtenue grâce à la condition à la limite (1.17f).

Dans cette section, les formulations en potentiels vecteurs de la magnétique transitoire ont été étudiées. Dans la prochaine section, les formulations en potentiels vecteurs seront décrites en régime harmonique.

1.4 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétoharmoniques

La *magnétoharmonique* étudie le régime harmonique : en plus d'être en régime instationnaire, les alimentations sont sinusoïdales et les matériaux linéaires. En régime harmonique, les grandeurs dépendantes du temps sont représentées comme étant la partie réelle d'une grandeur complexe. Par exemple, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est associé à une grandeur complexe $\underline{\mathbf{A}}$ tel que :

$$\mathbf{A} = \text{Re} (\underline{\mathbf{A}} e^{j\omega t}), \quad (1.19)$$

avec $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}$ le phaseur du potentiel \mathbf{A} et ω la pulsation d'alimentation. De plus avec ce formalisme complexe (1.19), l'opérateur de la dérivée temporelle $\frac{\partial}{\partial t}$ devient le facteur $j\omega$, parce que $\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\mathbf{A}} e^{j\omega t}) = j\omega \underline{\mathbf{A}} e^{j\omega t}$.

Le problème à résoudre en magnétoharmonique est le même qu'en magnétique transitoire, représenté sur la figure 1.3 : une boîte d'air (μ_0), une région magnétique non conductrice ($\mu, \sigma = 0$), une région magnétique conductrice ($\mu, \sigma \neq 0$), des bobines (\mathbf{J}_s), mais sans aimants (\mathbf{B}_r). Le modèle magnétoharmonique du domaine d'étude Ω et de frontière $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_e$ est constitué des mêmes équations que le modèle magnétique transitoire (1.15) avec le formalisme complexe (1.19) en plus, tel que :

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_e + \mathbf{J}_s, \quad (1.20a)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}, \quad (1.20b)$$

$$\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.20c)$$

$$\text{div } \underline{\mathbf{J}}_e = 0, \quad (1.20d)$$

$$\text{div } \underline{\mathbf{J}}_s = 0, \quad (1.20e)$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \nu \underline{\mathbf{B}}, \quad (1.20f)$$

$$\underline{\mathbf{J}}_e = \sigma \underline{\mathbf{E}}, \quad (1.20g)$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.20h)$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}. \quad (1.20i)$$

1.4.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

La formulation en $\mathbf{A} - V$ de la magnétoharmonique est définie, grâce aux équations du modèle magnétoharmonique (1.20a), (1.20d), (1.20f), (1.20g), (1.20h) et (1.20i), des définitions du potentiel vecteur magnétique (1.10) et du potentiel scalaire électrique (1.16) et au formalisme complexe (1.19), telle que :

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \underline{\mathbf{A}}) + \sigma (j\omega \underline{\mathbf{A}} + \text{grad } V) = \underline{\mathbf{J}}_s, \quad (1.21a)$$

$$\text{div } (\sigma (j\omega \underline{\mathbf{A}} + \text{grad } V)) = 0, \quad (1.21b)$$

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \underline{\mathbf{A}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.21c)$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{A}}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (1.21d)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } V|_{\Gamma_h} = 0, \quad (1.21e)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0. \quad (1.21f)$$

Dans la prochaine sous-section, le modèle magnétoharmonique sera détaillé à l'aide de la formulation avec le potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r .

1.4.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

La formulation en $\mathbf{A}_r - V$ de la magnétoharmonique est définie, en remplaçant le potentiel \mathbf{A} par \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12) dans la formulation en $\mathbf{A} - V$ (1.21), telle que [Biro et Preis, 2000]-[Xu et Simkin, 2004] :

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \underline{\mathbf{A}}_r) + \sigma (j\omega \underline{\mathbf{A}}_r + \text{grad } \underline{V}) = \underline{\mathbf{J}}_s - \text{rot } (\nu \text{ rot } \underline{\mathbf{A}}_s) - j\omega\sigma \underline{\mathbf{A}}_s, \quad (1.22a)$$

$$\text{div } (\sigma (j\omega \underline{\mathbf{A}}_r + \text{grad } \underline{V})) = -\text{div } (j\omega\sigma \underline{\mathbf{A}}_s), \quad (1.22b)$$

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \underline{\mathbf{A}}_r|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (1.22c)$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{A}}_r|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (1.22d)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } \underline{V}|_{\Gamma_h} = 0, \quad (1.22e)$$

$$\underline{V}|_{\Gamma_e} = 0. \quad (1.22f)$$

Les formulations en potentiel vecteur magnétique et en potentiel vecteur magnétique réduit ont été étudiées en magnétostatique, puis en magnétoharmonique et enfin en magnétique transitoire. Dans la suite, seulement les formulations de la magnétique transitoire seront détaillées. Les formulations de la magnétostatique et de la magnétoharmonique seront déduites de celles de la magnétique transitoire et données dans l'annexe D.

Dans le prochain chapitre, la modélisation mathématique des équations aux dérivées partielles sera étudiée afin de résoudre les formulations de la magnétique transitoire dans des espaces de dimension finie à l'aide de la méthode des éléments finis.

Chapitre 2

Modélisation avec les éléments finis

Sommaire

2.1	Modélisation continue	34
2.1.1	Espaces fonctionnels	34
2.1.1.1	Espaces de Lebesgue	34
2.1.1.2	Espaces de Sobolev	34
2.1.1.3	Espaces fonctionnels des opérateurs différentiels	35
2.1.2	Diagramme de Tonti	36
2.2	Modélisation discrète	38
2.2.1	Éléments finis	38
2.2.2	Espaces d'approximation	38
2.2.3	Éléments de référence et éléments réels	39
2.2.4	Fonctions de forme	41
2.2.4.1	Fonctions de forme nodales	41
2.2.4.2	Fonctions de forme d'arête	42
2.2.4.3	Fonctions de forme de facette	42
2.2.4.4	Propriétés des fonctions de forme	43
2.2.4.5	Décomposition des grandeurs physiques avec les fonctions de forme	43
2.2.4.6	Récapitulatif	44

2.1 Modélisation continue

2.1.1 Espaces fonctionnels

Soient $\Omega \in \mathbb{R}^m$ le *domaine d'étude* des équations aux dérivées partielles et Γ sa *frontière*. Le domaine Ω de frontière Γ est un ensemble ouvert borné de l'espace euclidien affine, en général à trois dimensions, voir l'annexe A.1.3 pour la définition d'un ensemble ouvert. Cet ensemble peut être connexe ou non (c'est-à-dire d'un seul tenant ou non, voir l'annexe A.1.1 pour la définition de la connexité).

Dans cette sous-section, les *espaces fonctionnels*, dans lesquels les équations aux dérivées partielles seront résolues, seront définis.

2.1.1.1 Espaces de Lebesgue

Les premiers espaces fonctionnels définis sont les espaces de Lebesgue : $L^2(\Omega)$, l'espace des champs scalaires de carré intégrable sur Ω et $\mathbf{L}^2(\Omega)$, l'espace des champs de vecteurs dont le carré de la norme euclidienne (notée $|\cdot|$) est intégrable sur Ω , tels que :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\Omega} (u(\mathbf{x}))^2 d\Omega < \infty \right\}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tel que } \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbb{R}}^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

Afin d'alléger les expressions intégrales, les notations suivantes seront utilisées dans la suite :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u v d\Omega, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} u v d\Gamma, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega), \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (2.5)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\Gamma \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (2.6)$$

Les intégrales (2.3) et (2.5) sont les produits scalaires respectifs des espaces $L^2(\Omega)$ (2.1) et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.2). Les normes respectives des espaces $L^2(\Omega)$ (2.1) et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.2) sont telles que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{L^2(\Omega)}}, \quad \forall u \in L^2(\Omega), \quad (2.7)$$

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (2.8)$$

2.1.1.2 Espaces de Sobolev

Les deuxièmes espaces fonctionnels définis sont les *espaces de Sobolev*, $H^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}^1(\Omega)$, tels que [Dautray et Lions, 1987b] :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ avec } i = 1, \dots, m \right\},$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ avec } i = 1, \dots, m \right\}.$$

2.1.1.3 Espaces fonctionnels des opérateurs différentiels

Les troisièmes espaces fonctionnels définis sont les espaces fonctionnels des opérateurs différentiels, le gradient, le rotationnel et la divergence.

Les équations aux dérivées partielles (par exemple, le modèle magnétique transitoire (1.15)) sont résolues dans un domaine Ω et font intervenir des opérateurs différentiels tels que le gradient, le rotationnel et la divergence. Les espaces de ces opérateurs différentiels sont définis de telle façon que **grad**, **rot** et **div** appartiennent à $L^2(\Omega)$ ou $\mathbf{L}^2(\Omega)$, tels que [Dular, 1996] :

$$H(\mathbf{grad}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{grad} \ u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} = H^1(\Omega), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{rot} \ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{div} \ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.11)$$

Les produits scalaires $(.,.)$ d' $H(\mathbf{grad}, \Omega)$ (2.9), d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.10) et d' $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ (2.11) sont définis respectivement à partir des produits scalaires de $L^2(\Omega)$ (2.3) et de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.5) :

$$(u, v)_{H(\mathbf{grad}, \Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\mathbf{grad} \ u, \mathbf{grad} \ v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad (2.12)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\mathbf{rot} \ \mathbf{a}, \mathbf{rot} \ \mathbf{b})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.13)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\mathbf{div} \ \mathbf{a}, \mathbf{div} \ \mathbf{b})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (2.14)$$

Les normes $\|.\|$ des espaces $H(\mathbf{grad}, \Omega)$ (2.9), $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.10) et $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ (2.11), définies à partir des normes de $L^2(\Omega)$ (2.7) et de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.8), sont respectivement :

$$\|u\|_{H(\mathbf{grad}, \Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{grad} \ u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (2.15)$$

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{rot} \ \mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.16)$$

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{div} \ \mathbf{a}\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (2.17)$$

Dans la suite, quatre sous-espaces fonctionnels des opérateurs différentiels (2.11) seront définis et notés $E_v^p, 0 \leq p \leq 3$. Ces espaces fonctionnels E_v^p satisfont en plus des conditions aux limites et sont définis tels que [Bossavit, 1988a]-[Bossavit, 1988b] :

$$E_v^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{grad} \ u \in \mathbf{L}^2(\Omega), u|_{\Gamma_v} = 0\} \subset H(\mathbf{grad}, \Omega), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{E}_v^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{rot} \ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_v} = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E}_v^2(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{div} \ \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma_v} = 0\} \subset \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega), \quad (2.20)$$

$$E_v^3(\Omega) = \text{cod}(\mathbf{div}), \quad (2.21)$$

où *cod* représente le codomaine (espace d'arrivée).

Les produits scalaires et normes des espaces $E_v^p, 0 \leq p \leq 3$ sont ceux des espaces dans lesquelles ils sont inclus. Par exemple, le produit scalaire et la norme d' \mathbf{E}_v^1 correspond au produit scalaire $(.,.)_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}$ (2.13) et à la norme $\|.\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}$ (2.16) d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Avec les conditions aux limites introduites dans les espaces E_v^p (2.21) et les formules (A.13) et (A.14) démontrées dans l'annexe A.2.5, des implications sont déduites telles que :

$$u|_{\Gamma_v} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{grad} \ u|_{\Gamma_v} = \mathbf{0}, \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \ \mathbf{u}|_{\Gamma_v} = 0. \quad (2.22b)$$

D'après les équations (2.22) et la définition d' E_v^3 (2.21), des inclusions des espaces E_v^p en sont déduites telles que :

$$\mathbf{grad} E_v^0 \subset \mathbf{E}_v^1, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_v^1 \subset \mathbf{E}_v^2, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E}_v^2 \subset E_v^3. \quad (2.25)$$

Ainsi, les opérateurs différentiels lient les espaces fonctionnels $E_v^p, 0 \leq p \leq 3$, entre eux de façon à former une suite, appelée la *suite de De Rham* et notée :

$$E_v^0 \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathbf{E}_v^1 \xrightarrow{\mathbf{rot}} \mathbf{E}_v^2 \xrightarrow{\mathbf{div}} E_v^3. \quad (2.26)$$

Dans la prochaine sous-section, les grandeurs des modèles magnétostatique et magnétique transitoire seront définies dans leurs espaces E_v^p ($0 \leq p \leq 3$), par la représentation d'un diagramme.

2.1.2 Diagramme de Tonti

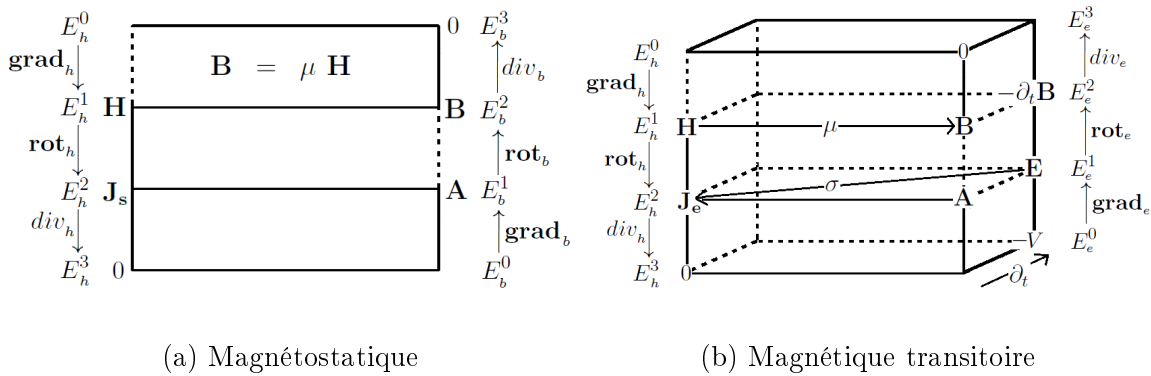


FIGURE 2.1 – Diagrammes de Tonti

Le modèle magnétostatique (1.9) est représenté sur le diagramme de Tonti de la figure 2.1a. Le *diagramme de Tonti* est composé des équations de Maxwell, des lois de comportement, des grandeurs électriques et magnétiques, des potentiels et de leurs espaces [Bossavit, 1988a]-[Bossavit, 1988b]-[Bossavit, 2004]. En magnétostatique, la loi de comportement (1.9d) permet de définir deux suites de De Rham, une pour les espaces E_h^p et une autre pour les espaces E_b^p , $0 \leq p \leq 3$. La première équation de Maxwell $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ (1.9a) est définie dans la suite de De Rham pour l'espace E_h^p . D'après l'inclusion (2.24) entre les espaces $\mathbf{E}_h^1(\Omega)$ (2.19) et $\mathbf{E}_h^2(\Omega)$ (2.20), \mathbf{H} et \mathbf{J}_s appartiennent respectivement aux espaces $\mathbf{E}_h^1(\Omega)$ et $\mathbf{E}_h^2(\Omega)$. Avec $\mathbf{J}_s \in \mathbf{E}_h^2(\Omega)$ et l'inclusion (2.25) entre les espaces $\mathbf{E}_h^2(\Omega)$ (2.20) et $E_h^3(\Omega)$ (2.21), la troisième équation de Maxwell $\mathbf{div} \mathbf{J}_s = 0$ (1.9c) est respectée. D'après la deuxième équation de Maxwell $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$ (1.9b) et l'inclusion (2.25) entre les espaces $\mathbf{E}_b^2(\Omega)$ (2.20) et $E_b^3(\Omega)$ (2.21), l'induction \mathbf{B} appartient à l'espace $\mathbf{E}_b^2(\Omega)$. Les potentiels peuvent aussi être introduit dans le diagramme de Tonti. Le potentiel vecteur \mathbf{A} est défini tel que $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ (1.10), alors d'après l'inclusion (2.24) entre les espaces $\mathbf{E}_b^1(\Omega)$ (2.19) et $\mathbf{E}_b^2(\Omega)$ (2.20), \mathbf{A} appartient à l'espace $\mathbf{E}_b^1(\Omega)$. Finalement, les grandeurs \mathbf{H} , \mathbf{J}_s , \mathbf{B} et \mathbf{A} sont toutes regroupées dans le diagramme de Tonti de la figure 2.1a.

2.1. MODÉLISATION CONTINUE

La même explication peut être réalisée avec le modèle magnétique transitoire (1.15) pour obtenir le diagramme de Tonti de la figure 2.1b. Dans ce diagramme, une troisième dimension est ajoutée pour prendre en compte la dépendance en temps.

Le diagramme de Tonti du modèle magnétoharmonique (1.20) est le même que celui de la magnétique transitoire, représenté sur la figure 2.1b, en introduisant le formalisme complexe (1.19) et en remplaçant ∂_t par $j\omega$.

Grâce aux diagrammes de Tonti de la figure 2.1, l'espace de chaque grandeur physique est défini. Les espaces fonctionnels utiles aux équations aux dérivées partielles ont été étudiés. Dans la prochaine section, les éléments finis, qui permettent de passer d'un domaine infini à un domaine fini, seront expliqués.

2.2 Modélisation discrète

2.2.1 Éléments finis

Un *élément fini* est défini par le triplet (K, P_K, Σ_K) tel que [Bossavit, 2004]-[Dular, 1996]-[Ern, 2005] :

- K est une partie du domaine Ω , appelé *élément géométrique* (par exemple en deux dimensions, K est un triangle ou un quadrangle et en trois dimensions, K est un tétraèdre, un hexaèdre, un prisme ou une pyramide),
- P_K est un espace fonctionnel de dimension finie n_K , défini sur K (par exemple, des espaces discrets d' $E_v^p, 0 \leq p \leq 3$),
- Σ_K est un ensemble de n_K degrés de liberté représentés par n_K fonctionnelles linéaires u_i avec $1 \leq i \leq n_K$, définies sur l'espace P_K et à valeurs dans \mathbb{R} .

De plus, l'élément fini (K, P_K, Σ_K) doit être *unisolvant*, c'est-à-dire qu'il faut qu'une fonction quelconque $u \in P_K$ puisse être déterminée de façon unique grâce aux degrés de liberté de Σ_K [Dautray et Lions, 1988].

Un élément fini permet d'interpoler une grandeur physique dans un espace fonctionnel de dimension finie et dans un domaine de l'espace de topologie simple, un élément géométrique. L'interpolation d'une fonction u dans l'espace P_K et sur K , est donnée par l'expression :

$$u_K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_K} u_j w_j(\mathbf{x}), \quad (2.27)$$

avec $w_j \in P_K, \mathbf{x} \in K$ et $u_j \in \Sigma_K, 1 \leq j \leq n_K$.

Dans la prochaine sous-section, les espaces des éléments finis seront étudiés.

2.2.2 Espaces d'approximation

L'utilisation des éléments finis conduit à une discrétisation spatiale du domaine Ω en éléments géométriques K_i , tels que $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{K}_i$ et $\bigcap_{i=1}^n K_i = \emptyset$. Dans la suite, K représente un élément géométrique K_i quelconque. La discrétisation spatiale du domaine est aussi appelée le *maillage*. Pour calculer sur le maillage, des *espaces d'approximation* finis W_v^0, \mathbf{W}_v^1 et \mathbf{W}_v^2 seront construits à partir des espaces infinis E_v^0 (2.18), \mathbf{E}_v^1 (2.19) et \mathbf{E}_v^2 (2.20).

Soit Ω_h le maillage du domaine Ω , réalisé par l'assemblage d'éléments géométriques K (par exemple, avec des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes). Pour construire les espaces de dimension finie, $W_v^p, 0 \leq p \leq 2$, plusieurs familles d'éléments finis sont utilisées :

- les *éléments de Lagrange*, ou *éléments nodaux*, pour construire l'espace tel que

$$W_v^0(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) \mid w|_K \in E_v^0(K), \forall K \in \Omega_h\}, \quad (2.28)$$

- les *éléments de Nédélec* [Nedelec, 1980], ou *éléments d'arête*, pour construire l'espace tel que

$$\mathbf{W}_v^1(\Omega) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{w}|_K \in \mathbf{E}_v^1(K), \forall K \in \Omega_h\}, \quad (2.29)$$

- les *éléments de Raviart-Thomas* [Raviart et Thomas, 1977], ou *éléments de facette*, pour construire l'espace tel que

$$\mathbf{W}_v^2(\Omega) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{w}|_K \in \mathbf{E}_v^2(K), \forall K \in \Omega_h\}. \quad (2.30)$$

2.2. MODÉLISATION DISCRÈTE

Les propriétés de ces espaces (2.28), (2.29) et (2.30) sont telles que :

- une fonction de W_v^0 appartient à E_v^0 si elle est continue aux nœuds du maillage,
- une fonction de \mathbf{W}_v^1 appartient à \mathbf{E}_v^1 si sa composante tangentielle est continue à travers les arêtes du maillage, l'espace \mathbf{W}_v^1 est alors *rot-conforme*,
- une fonction de \mathbf{W}_v^2 appartient à \mathbf{E}_v^2 si sa composante normale est continue à travers les facettes du maillage, l'espace \mathbf{W}_v^2 est alors *div-conforme*.

Dans la prochaine sous-section, les éléments de référence seront définis en fonction des éléments réels du maillage.

2.2.3 Éléments de référence et éléments réels

Un *élément de référence* est un élément de forme géométrique simple, à frontière rectiligne : triangle rectangle, carré, tétraèdre régulier, cube, etc. Généralement, les coordonnées de l'élément de référence varient entre -1 , 1 et 0 . Tous les éléments géométriques K du maillage, appelés *éléments réels*, sont représentés à partir des éléments de référence. Les éléments réels sont plus compliqués que les éléments de référence : ce sont des triangles quelconques, quadrangles, tétraèdres quelconques, hexaèdres, etc. Il est alors nécessaire de réaliser une transformation géométrique pour passer d'un élément de référence à un élément réel. Les éléments de référence sont utilisés pour définir une base unique par espace W_v^p , $0 \leq p \leq 2$ et par type d'élément. Dans le logiciel Flux[®], les éléments de référence utilisés en deux dimensions sont le triangle et le quadrangle et en trois dimensions, le tétraèdre, l'hexaèdre, le prisme et la pyramide. Ils sont détaillés dans la figure 2.2.

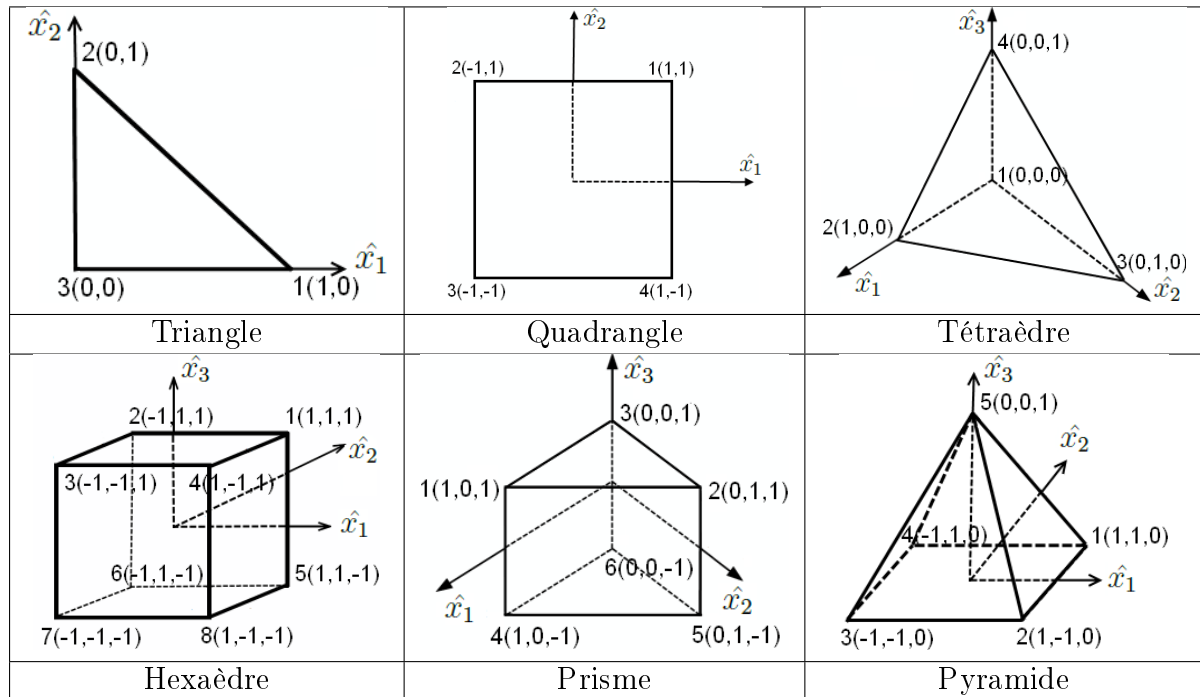


FIGURE 2.2 – Les éléments de référence

Soit m la dimension du domaine Ω , $m = 2$ en 2D et $m = 3$ en 3D. Soient $K \subset \mathbb{R}^m$ un élément réel et $\hat{K} \subset \mathbb{R}^m$ l'élément de référence correspondant à l'élément K . Soient $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$ les coordonnées de l'élément de référence \hat{K} et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ les coordonnées de l'élément réel K . Soit Φ_K une fonction continue et dérivable, qui permet de passer des coordonnées $\hat{\mathbf{x}}$ de

l'élément de référence \hat{K} aux coordonnées \mathbf{x} de l'élément réel K tel que :

$$\begin{aligned}\Phi_K : \hat{K} &\rightarrow K \\ \hat{\mathbf{x}} &\rightarrow \Phi_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de la fonction Φ_K , $\Phi_{K,i}$, est défini tel que $\Phi_{K,i}(\hat{\mathbf{x}}) = x_i, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}, 1 \leq i \leq m$. De plus, l'inverse de la fonction Φ_K , Φ_K^{-1} , est définie telle que $\Phi_K^{-1}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in K$. Les notations utilisées pour le passage de l'élément de référence à l'élément réel sont représentées en deux dimensions ($m = 2$) sur la figure 2.3.

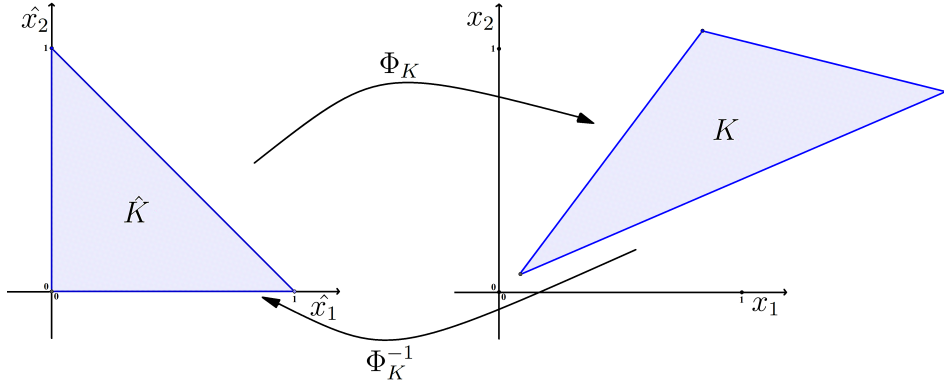


FIGURE 2.3 – Passage d'un élément de référence \hat{K} à un élément réel K

Soit $J_K(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\partial \Phi_{K,i}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{x}_j) \right)_{1 \leq i,j \leq k}$ la matrice jacobienne du changement de coordonnées. Les transformations de Piola [Zaglmayr, 2006] permettent de définir la fonction \mathbf{u} dans l'élément réel à partir de la fonction $\hat{\mathbf{u}}$ de l'élément de référence dans les espaces $H(\mathbf{grad})$, $\mathbf{H}(\mathbf{rot})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{div})$. Dans le tableau 2.1, les transformations de Piola, ainsi que le calcul de l'opérateur (gradient, rotationnel ou divergence) de \mathbf{u} dans l'élément réel à partir de l'opérateur de $\hat{\mathbf{u}}$ dans l'élément de référence, sont donnés.

Espace de \hat{K}	\mathbf{u} à partir de $\hat{\mathbf{u}}$	Opérateur de \mathbf{u} à partir de $\hat{\mathbf{u}}$
$H(\mathbf{grad}, \hat{K})$	$u = \hat{u}(\Phi_K^{-1}) \quad (2.31)$	$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} u = J_K^{-T} \mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{u}(\Phi_K^{-1}) \quad (2.32)$
$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \hat{K})$	$\mathbf{u} = J_K^{-T} \hat{\mathbf{u}}(\Phi_K^{-1}) \quad (2.33)$	$\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{J_K}{\det(J_K)} \mathbf{rot}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{u}}(\Phi_K^{-1}) \quad (2.34)$
$\mathbf{H}(\mathbf{div}, \hat{K})$	$\mathbf{u} = \frac{J_K}{\det(J_K)} \hat{\mathbf{u}}(\Phi_K^{-1}) \quad (2.35)$	$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{1}{\det(J_K)} \mathbf{div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{u}}(\Phi_K^{-1}) \quad (2.36)$

TABLEAU 2.1 – Transformations de Piola conformes

Finalement, ces transformations de Piola permettent de passer d'une fonction définie dans l'élément de référence à une fonction définie dans l'élément réel, tout en respectant la conformité des espaces de travail.

Dans la prochaine sous-section, les bases, ou fonctions de forme, des espaces $W_v^p, 0 \leq p \leq 2$ seront définies pour les éléments de référence.

2.2.4 Fonctions de forme

Pour décrire les bases des espaces d'approximation W_v^0 (2.28), \mathbf{W}_v^1 (2.29) et \mathbf{W}_v^2 (2.30) dans les éléments de référence, les éléments de Whitney sont utilisés. Les *éléments de Whitney* [Bossavit, 1988b] décrivent les *fonctions de forme*, qui définissent la base des espaces d'approximation, pour tous les éléments de référence de la figure 2.2.

Les éléments du maillage Ω_h sont appelés les *volumes* et les sommets de ces éléments constituent les *nœuds*. Les autres entités géométriques de l'élément sont les *arêtes* et les *facettes*. Les ensembles des nœuds, des arêtes, des facettes et des éléments de ce maillage sont respectivement notés N , A , F et K tel que $\dim(N) = n_N$, $\dim(A) = n_A$, $\dim(F) = n_F$ et $\dim(K) = n_K$.

Il existe quatre types de fonctions de forme suivant que nous travaillions avec les nœuds, les arêtes, les facettes ou les volumes du maillage Ω_h . Ici, les fonctions de volumes ne seront pas étudiées. Les éléments de Whitney seront décrits dans la suite pour les triangles, les quadrangles, les tétraèdres, les hexaèdres et les prismes mais pas pour les pyramides ; pour les fonctions de forme de la pyramide, voir [Coulomb *et al.*, 1997], [Gradinaru et Hiptmair, 1999] et [Zgainski *et al.*, 1996].

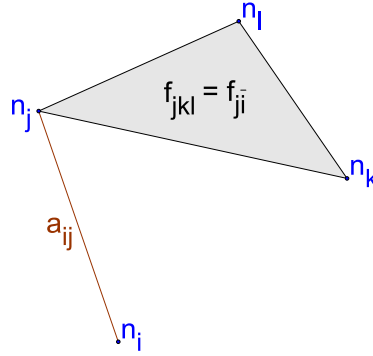


FIGURE 2.4 – Facette notée $f_{j\bar{i}}$

Dans la suite, le $i^{\text{ème}}$ nœud du maillage Ω_h sera désigné par n_i . L'arête entre les nœuds n_i et n_j sera nommée a_{ij} . Les arêtes seront également désignées par a_k , avec une numérotation des arêtes de $k = 1$ à n_A choisie. Une facette triangulaire entre les nœuds n_j , n_k et n_l est nommée f_{jkl} et une facette quadrangulaire entre les nœuds n_j , n_k , n_l et n_m est nommée f_{jklm} . Une facette sera aussi définie par l'arête a_{ij} tel que la facette pour laquelle le nœud n_j de l'arête a_{ij} lui appartienne mais pas le nœud n_i , elle sera notée $f_{j\bar{i}}$. Ce cas est illustré sur la figure 2.4. Par la suite, l'ensemble des nœuds d'une facette $f_{j\bar{i}}$ sera noté $\{j, \bar{i}\}$; pour la figure 2.4, $\{j, \bar{i}\} = \{j, k, l\}$. Une facette sera également désignée par f_m , avec une numérotation des arêtes de $m = 1$ à n_F choisie.

Dans les prochains paragraphes, les fonctions de forme nodales, d'arête et de facette seront définies pour les éléments de référence. Les fonctions de forme pour les éléments réels sont déduites des fonctions de forme des éléments de référence et des transformations de Piola du tableau 2.3, permettant de passer d'un élément de référence à un élément réel.

2.2.4.1 Fonctions de forme nodales

Soit \mathbf{x}_i les coordonnées du nœud n_i . La *fonction de forme nodale* des éléments de référence $w_{n_i}^{ref}(\mathbf{x})$ vaut 1 pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$, varie continûment dans les éléments possédant le nœud i et vaut 0 dans les autres éléments sans subir de discontinuité, telle que [Dhatt et Touzot, 1981] :

$$w_{n_i}^{ref}(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n_N \text{ et } n_i \in N, \quad (2.37)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker (qui vaut 1 quand $i = j$ et 0 sinon). Les fonctions de forme nodales des éléments réels w_{n_i} , sont définies, d'après la transformation de Piola (2.31) du tableau 2.3, telles que :

$$w_{n_i}(\mathbf{x}) = w_{n_i}^{ref}(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x} \in K, 1 \leq i \leq n_N \text{ et } n_i \in N. \quad (2.38)$$

L'ensemble des fonctions $w_{n_i}^{ref}$ (2.37), $\forall n_i \in N$, constitue la base de l'espace des éléments nodaux $W_v^0(\Omega)$ (2.28).

Dans le prochain paragraphe, les fonctions de forme sont définies sur les arêtes.

2.2.4.2 Fonctions de forme d'arête

A l'arête a_{ij} du maillage Ω_h , la *fonction de forme d'arête* des éléments de référence $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}^{ref}$ est définie telle que [Dular *et al.*, 1994]-[Webb, 1993] :

$$\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}^{ref} = w_{n_j}^{ref} \mathbf{grad} \left(\sum_{k \in \{j, \bar{i}\}} w_{n_k}^{ref} \right) - w_{n_i}^{ref} \mathbf{grad} \left(\sum_{l \in \{i, \bar{j}\}} w_{n_l}^{ref} \right), 1 \leq i, j \leq n_N \text{ et } a_{ij} \in A. \quad (2.39)$$

Cette formule (2.39) permet de calculer les fonctions de forme d'arête du triangle, du quadrangle, du tétraèdre, de l'hexaèdre et du prisme de référence de la figure 2.2. Les fonctions de forme d'arête des éléments réels $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}$ sont définies, d'après la transformation de Piola (2.33) du tableau 2.3, telles que :

$$\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}(\mathbf{x}) = J_K^{-T}(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x})) \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}^{ref}(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x} \in K, 1 \leq i, j \leq n_N \text{ et } a_{ij} \in A. \quad (2.40)$$

La fonction de forme d'arête $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}$ (2.39)-(2.40) est nulle dans tous les éléments non adjacents à l'arête a_{ij} . L'ensemble des fonctions $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}$ (2.39)-(2.40), $\forall a_{ij} \in A$, engendre l'espace des éléments d'arête $\mathbf{W}_v^1(\Omega)$ (2.29).

Dans le prochain paragraphe, les fonctions de forme seront définies pour les facettes des éléments.

2.2.4.3 Fonctions de forme de facette

Soit la facette f_m dont l'ensemble des nœuds est noté $m = \{n_1, n_2, n_3\}$ si la facette est triangulaire ou $m = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ si elle est quadrangulaire. A la facette f_m d'un élément quelconque, la *fonction de forme de facette* des éléments de référence $\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}^{ref}$ est définie telle que [Dular *et al.*, 1994] :

$$\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}^{ref} = a_{f_m} \sum_{k=1}^{n_{Nf_m}} w_{n_k}^{ref} \mathbf{grad} \left(\sum_{i \in \{n_k, \overline{n_{k+1}}\}} w_{n_i}^{ref} \right) \times \mathbf{grad} \left(\sum_{j \in \{n_k, \overline{n_{k-1}}\}} w_{n_j}^{ref} \right), f_m \in F, \quad (2.41)$$

avec n_{Nf_m} le nombre de nœuds de la facette f_m et a_{f_m} un coefficient qui vaut 2 si la facette f_m est triangulaire et 1 si elle est quadrangulaire. Pour avoir une rotation dans les indices (à cause de n_{k-1} et n_{k+1}), nous posons $n_0 = n_{n_{Nf_m}}$ et $n_{n_{Nf_m}+1} = n_1$.

Cette formule (2.41) permet de calculer les fonctions de forme de facette des éléments de référence en trois dimensions. En deux dimensions, les fonctions de forme de facette des éléments de référence sont obtenues par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ des fonctions de forme d'arête.

2.2. MODÉLISATION DISCRÈTE

Les fonctions de forme de facette des éléments réels $\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}$ sont définies, d'après la transformation de Piola (2.35) du tableau 2.3, telles que :

$$\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}(\mathbf{x}) = \frac{J_K(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x}))}{\det(J_K(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x})))} \mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}^{ref}(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x} \in K, 1 \leq m \leq n_F \text{ et } f_m \in F. \quad (2.42)$$

La fonction de forme de facette $\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}$ (2.41)-(2.42) est nulle pour tous les éléments non adjacents à la facette f_m . L'espace des éléments de facette $\mathbf{W}_{\mathbf{v}}^2(\Omega)$ (2.30) est engendré par l'ensemble des fonctions de forme de facette $\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}$ (2.41)-(2.42), $\forall f_m \in F$.

Les fonctions de forme nodales, d'arête et de facette ont été décrites. Dans le prochain paragraphe, les propriétés de ces fonctions seront étudiées.

2.2.4.4 Propriétés des fonctions de forme

Les fonctions de forme (2.37), (2.40) et (2.42) vérifient les propriétés telles que :

- w_{n_i} vaut 1 au nœud n_i et 0 aux autres nœuds,
- la circulation de $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}$ vaut 1 le long de l'arête a_{ij} et 0 le long des autres arêtes,
- le flux de $\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}$ vaut 1 à travers la facette f_m et 0 à travers les autres facettes.

Elles vérifient aussi les propriétés de continuité telles que :

- la fonction w_{n_i} est continue aux nœuds du maillage,
- la composante tangentielle de $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ij}}$ est continue le long des arêtes du maillage,
- la composante normale de $\mathbf{w}_{\mathbf{f}_m}$ est continue à travers les facettes du maillage.

Ces propriétés des fonctions de forme sont résumées dans le tableau 2.5.

Fonction	Propriété	Continuité	Espace engendré
w_n	$w_{n_i}(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$	continue	W_v^0
$\mathbf{w}_{\mathbf{a}}$	$\int_{a_k} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1} \cdot d\mathbf{l} = \delta_{kl}$	$\mathbf{w}_{\mathbf{a}} \times \mathbf{n}$	$\mathbf{W}_{\mathbf{v}}^1$
$\mathbf{w}_{\mathbf{f}}$	$\int_{f_m} \mathbf{w}_{\mathbf{f}_n} \cdot d\mathbf{S} = \delta_{mn}$	$\mathbf{w}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}$	$\mathbf{W}_{\mathbf{v}}^2$

FIGURE 2.5 – Propriétés des fonctions de forme

Dans la suite, les grandeurs magnétiques et électriques seront décomposées selon leurs espaces définis dans le diagramme de Tonti (figure 2.1 de la sous-section 2.1.2) à l'aide des fonctions de forme nodales, d'arête et de facette.

2.2.4.5 Décomposition des grandeurs physiques avec les fonctions de forme

A partir des fonctions de forme nodales (2.37) et d'arête (2.40), les variables des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ sont décomposées dans les espaces $W_v^i(\Omega)$, $0 \leq i \leq 1$, à l'aide de l'interpolation (2.27). Ces variables sont maintenant définies au niveau discret, c'est-à-dire sur le maillage Ω_h du domaine Ω , telles que :

$$\begin{aligned} V &\in W_e^0(\Omega)(\Omega), \\ \mathbf{A}, \mathbf{A}_{\mathbf{r}} &\in \mathbf{W}_{\mathbf{h}}^1(\Omega)(\Omega). \end{aligned}$$

Alors, V est défini sur chaque nœud du maillage Ω_h et \mathbf{A} et \mathbf{A}_r sur les arêtes du maillage.

Par conséquent, le potentiel scalaire électrique V est décomposé dans l'espace des éléments nodaux $W_e^0(\Omega)(\Omega)$ tel que :

$$V(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_N} V_{n_i}(t) w_{n_i}(\mathbf{x}), \quad (2.43)$$

avec V_{n_i} la valeur du potentiel scalaire électrique V au nœud n_i .

Les potentiels vecteurs magnétiques \mathbf{A} et \mathbf{A}_r sont décomposés dans l'espace des éléments d'arête $\mathbf{W}_h^1(\Omega)(\Omega)$ tels que :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{n_A} A_{a_k}(t) \mathbf{w}_{a_k}(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{A}_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{n_A} A_{r_{a_k}}(t) \mathbf{w}_{a_k}(\mathbf{x}), \quad (2.45)$$

avec

- A_{a_k} la circulation du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} sur l'arête a_k ,
- $A_{r_{a_k}}$ la circulation du potentiel vecteur électrique \mathbf{A}_r sur l'arête a_k .

2.2.4.6 Récapitulatif

Finalement, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ sont définies avec \mathbf{A} ou \mathbf{A}_r interpolé sur les éléments finis d'arête et V sur les éléments finis nodaux. Parfois le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est interpolé avec les éléments nodaux, en considérant l'interpolation de chaque composante d' \mathbf{A} selon x , y ou z en éléments nodaux [Biro et Preis, 1989]. Mais lorsqu' \mathbf{A} est interpolé avec les éléments nodaux, les conditions de continuité imposées sur \mathbf{A} sont trop fortes : la continuité des composantes normales et tangentielles d' \mathbf{A} est imposée alors que la continuité de la composante tangentielle d' \mathbf{A} suffit. C'est pourquoi il est plus adapté d'utiliser les éléments d'arête pour le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} [Biro *et al.*, 1996]-[Preis *et al.*, 1992], ainsi que pour le potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r [Biro *et al.*, 1999]-[Biro et Preis, 2000]-[Xu et Simkin, 2004], puisque seulement la continuité de la composante tangentielle d' \mathbf{A} est imposée avec des éléments d'arête. Dans sa thèse [Golovanov, 1997], Golovanov compare les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ avec le potentiel vecteur magnétique interpolé sur les éléments nodaux ou sur les éléments d'arête en régime stationnaire ou instationnaire.

Dans ce chapitre, la modélisation des équations aux dérivées partielles a été décrite. Dans le prochain chapitre, cette modélisation sera appliquée aux formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.17) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) de la magnétique transitoire, décrites dans la section 1.3.

Chapitre 3

Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires

Sommaire

3.1	Formulations faibles	46
3.1.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	46
3.1.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	47
3.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	49
3.2.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	49
3.2.1.1	Formulation matricielle	49
3.2.1.2	Approximation des dérivées en temps avec la méthode d'Euler	50
3.2.1.3	Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson	51
3.2.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	53
3.3	Résolution des formulations matricielles	55
3.3.1	Solveurs	55
3.3.1.1	Direct	55
3.3.1.2	Itératif	56
3.3.1.2.1	Point fixe	56
3.3.1.2.2	Krylov	56
3.3.2	Condition de jauge	57
3.3.2.1	Jauge de Coulomb	57
3.3.2.2	Jauge d'arête	57
3.3.2.2.1	Définition	57
3.3.2.2.2	Arbre d'arêtes	57
3.3.2.3	Sans jauge	58

Dans ce chapitre, les formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.17) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18), données dans la section 1.3, décrivant le modèle magnétique transitoire (1.15) seront étudiées avec la méthode des éléments finis.

Les formulations en \mathbf{A} (1.11) et en \mathbf{A}_r (1.14) de la magnétostatique (décrite dans la section 1.2), ainsi que les formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.21) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.22) de la magnétoharmonique (décrite dans la section 1.4) ne seront pas décrites dans ce chapitre, mais dans l'annexe D. Les formulations en \mathbf{A} (1.11) et en \mathbf{A}_r (1.14) de la magnétostatique peuvent être déduites des formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.17) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) de la magnétique transitoire en annulant les dérivées en temps ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et la conductivité ($\sigma = 0$). En magnétoharmonique, les formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.21) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.22) se déduisent des formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.17) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) de la magnétique transitoire en utilisant le formalisme complexe (1.19) et en remplaçant la dérivée en temps $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j\omega$.

3.1 Formulations faibles

3.1.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

Dans cette sous-section, la formulation en $\mathbf{A} - V$ de la magnétique transitoire (1.17) sera étudiée. Cette forme initiale (1.17), décrite dans la sous-section 1.3.1, constitue la *formulation forte* en $\mathbf{A} - V$ de la magnétique transitoire (1.15). Des formules de Green (A.10), décrites dans l'annexe A.2.4, seront appliquées sur cette formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.17) pour en déduire une formulation faible.

Dans un premier temps, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, au potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A} \in \mathbf{E}_e^1(\Omega)$, au potentiel scalaire électrique $V \in E_e^0(\Omega)$ et à une fonction test \mathbf{A}' à définir, la première équation de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.17a) devient :

$$\begin{aligned} (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \operatorname{grad} V, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.17c) de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$, le terme $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. D'après la loi de comportement (1.15f) et la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.15h) de la magnétique transitoire, $\mathbf{n} \times \mathbf{B}_r|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ alors le terme $\langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. Donc l'espace $\mathbf{E}_{e0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_e^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$ est défini pour la fonction test \mathbf{A}' tel que $\operatorname{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)} = \langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)} = 0$. L'équation (3.1) se réduit alors à :

$$\begin{aligned} (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \operatorname{grad} V, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + (\nu \mathbf{B}_r, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans un second temps, en appliquant la formule de Green (A.10a), démontrée dans l'annexe A.2.4.1, aux potentiels \mathbf{A} et V et à une fonction test V' à définir, la deuxième équation

3.1. FORMULATIONS FAIBLES

de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.17b) devient :

$$-\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{grad} V'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma)} - (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V, V' \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0. \quad (3.3)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.17c) de la formulation en $\mathbf{A} - V$ et l'implication (A.15) de l'annexe A.2.5.3, le terme $\left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma)}$ devient $\left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}$, car $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}|_{\Gamma_h} = 0$. D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V|_{\Gamma_h} = 0$ (1.17e) de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$, le terme $\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V, V' \rangle_{L^2(\Gamma)}$ devient $\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V, V' \rangle_{L^2(\Gamma_e)}$. Alors la fonction test V' est définie telle qu'elle appartienne à $E_{e0}^0(\Omega) = \{V' \in E_e^0(\Omega), V'|_{\Gamma_e} = 0\}$ pour que $\mathbf{grad} V' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)} = \langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V, V' \rangle_{L^2(\Gamma_e)} = 0$. L'équation (3.3) se réduit alors à :

$$\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{grad} V'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \quad (3.4)$$

Les équations (3.2) et (3.4) prennent en compte faiblement les conditions aux limites sur le bord Γ_h pour les potentiels \mathbf{A} (1.17c) et V (1.17e) de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.17), mais elles ne prennent pas en compte les conditions aux limites sur Γ_e pour \mathbf{A} (1.17d) et V (1.17f). Alors en ajoutant les conditions aux limites (1.17d) et (1.17f) aux équations (3.2) et (3.4), la *formulation faible* en $\mathbf{A} - V$, déduite de la formulation forte (1.17), est telle que :

Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $V \in H(\mathbf{grad}, \Omega)$ tel que

$$(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega), \quad (3.5a)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{grad} V'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega), \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (3.5c)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.5d)$$

avec les dérivées en temps approximées par la méthode d'Euler, expliquée dans l'annexe B.

Dans la prochaine sous-section, la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ sera étudiée.

3.1.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

Dans cette sous-section, la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ de la magnétique transitoire sera étudiée à partir de sa formulation forte (1.18), décrite dans la sous-section 1.3.2, et de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) en remplaçant \mathbf{A} par \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12).

La formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ est définie telle que :

Trouver $\mathbf{A}_r \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $V \in H(\mathbf{grad}, \Omega)$ tel que

$$(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + (\nu (\mathbf{B}_r - \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega) \quad (3.6a)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \\ - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega) \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}_r|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (3.6c)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.6d)$$

avec les dérivées en temps approximées par la méthode d'Euler, expliquée dans l'annexe B.

Une formulation faible peut être considérée comme un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Dans la prochaine section, il sera étudié comment il est possible d'approximer un tel problème grâce à la méthode des éléments finis. Cette approximation constituera la phase de discrétisation et permettra de travailler avec un nombre fini d'équations et d'inconnues.

3.2 Modélisation discrète avec les éléments finis

Dans cette section, toutes les grandeurs magnétiques et électriques ainsi que les potentiels sont considérés au niveau discret, c'est-à-dire qu'ils sont définis sur le maillage du domaine Ω , dans les espaces $W_v^p(\Omega)$, $0 \leq p \leq 3$ définis dans la sous-section 2.2.2 et dans les espaces $W_{v0}^p(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in W_v^p, \mathbf{A}'|_{\Gamma_v} = \mathbf{0}\}$, $0 \leq p \leq 3$. Notre but est de définir les formulations faibles de la section 3.1 sous forme matricielle à l'aide de la décomposition des grandeurs physiques sur les éléments finis du paragraphe 2.2.4.5, afin d'obtenir des systèmes linéaires ou non-linéaires à résoudre.

3.2.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

3.2.1.1 Formulation matricielle

Les variables de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), V , V' , \mathbf{A} et \mathbf{A}' , sont définies au niveau discret à l'aide de la méthode des éléments finis : $V \in W_e^0(\Omega)$, $V' \in W_{e0}^0(\Omega)$, $\mathbf{A} \in \mathbf{W}_e^1(\Omega)$ et $\mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{e0}^1(\Omega)$.

En injectant les décompositions de V (2.43) et \mathbf{A} (2.44) du paragraphe 2.2.4.5 sur les éléments finis, les équations (3.5a) et (3.5b) de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) deviennent :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} A_{a_k}(t) (\nu \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{A}'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n_A} \frac{\partial A_{a_k}(t)}{\partial t} (\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{x}), \mathbf{A}'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \sum_{i=1}^{n_N} V_{n_i}(t) (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}(\mathbf{x}), \mathbf{A}'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s(\mathbf{x}), \mathbf{A}'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + (\nu \mathbf{B}_r(t, \mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{A}'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{e0}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} \frac{\partial A_{a_k}(t)}{\partial t} (\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{x}), \operatorname{grad} V'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \sum_{i=1}^{n_N} V_{n_i}(t) (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}(\mathbf{x}), \operatorname{grad} V'(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall V' \in W_{e0}^0(\Omega). \end{aligned} \quad (3.7b)$$

La méthode de Galerkin consiste à définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$ (car l'équation (3.7a) est valable pour tout \mathbf{A}' dans $\mathbf{W}_{e0}^1(\Omega)$ donc pour la valeur particulière $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \in \mathbf{W}_{e0}^1(\Omega)$) et la fonction test V' telle que $V' = w_{n_j}$, avec $1 \leq j \leq n_N$ (car l'équation (3.7b) est valable pour tout V' dans $W_{e0}^0(\Omega)$ donc en particulier, pour $w_{n_j} \in W_{e0}^0(\Omega)$). Alors la formulation (3.7) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} A_{a_k}(t) (\nu \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n_A} \frac{\partial A_{a_k}(t)}{\partial t} (\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{x}), \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \sum_{i=1}^{n_N} V_{n_i}(t) (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}(\mathbf{x}), \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s(\mathbf{x}), \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + (\nu \mathbf{B}_r(t, \mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall a_l \in A, \end{aligned} \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} \frac{\partial A_{a_k}(t)}{\partial t} (\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{x}), \operatorname{grad} w_{n_j}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \sum_{i=1}^{n_N} V_{n_i}(t) (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}(\mathbf{x}), \operatorname{grad} w_{n_j}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall n_j \in N. \end{aligned} \quad (3.8b)$$

Les équations (3.8a) et (3.8b) prennent en compte faiblement les conditions aux limites sur le bord Γ_h pour les potentiels \mathbf{A} et V comme la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), mais elles ne prennent pas en compte les conditions aux limites sur Γ_e pour \mathbf{A} et V . Alors avec les équations (3.8), la *formulation matricielle* en $\mathbf{A} - V$, déduite de la formulation faible (3.5), est telle que :

$$R_{RR\nu}\mathbf{A}_a + R_{AA\sigma}\frac{\partial\mathbf{A}_a}{\partial t} + R_{AG\sigma}\mathbf{V}_n = \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} + \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{B}_{r\nu}}, \quad (3.9a)$$

$$R_{AG\sigma}^T\frac{\partial\mathbf{A}_a}{\partial t} + R_{GG\sigma}\mathbf{V}_n = \mathbf{0}, \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{A}_a|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (3.9c)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.9d)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR\nu} &= \left[(\nu \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_k}(\mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{A}_a &= [A_{a_k}(t)]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - R_{AA\sigma} &= \left[(\sigma \mathbf{w}_{a_k}(\mathbf{x}), \mathbf{w}_{a_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - R_{AG\sigma} &= \left[(\sigma \mathbf{w}_{a_l}(\mathbf{x}), \operatorname{grad} w_{n_i}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}, \\ - \mathbf{V}_n &= [V_{n_i}(t)]_{1 \leq i \leq n_N}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s(\mathbf{x}), \mathbf{w}_{a_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{B}_{r\nu}} &= \left[(\nu \mathbf{B}_r(t, \mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_l}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - R_{GG\sigma} &= \left[(\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}(\mathbf{x}), \operatorname{grad} w_{n_j}(\mathbf{x}))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}. \end{aligned}$$

Un système matriciel est résolu plus facilement si la matrice est symétrique. Or, la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.9) n'est pas symétrique. Pour obtenir un système symétrique, le *potentiel scalaire électrique intégré* v est défini tel que :

$$V = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3.10)$$

De plus, la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.9), possède des dérivées en temps $\frac{\partial}{\partial t}$. Ces dérivées en temps doivent être approchées pour résoudre la formulation en $\mathbf{A} - V$ (3.9). L'approximation de ces dérivées sera étudiée dans le prochain paragraphe.

3.2.1.2 Approximation des dérivées en temps avec la méthode d'Euler

En régime transitoire, les dérivées temporelles de la formulation en $\mathbf{A} - V$ (3.9) sont approchées par la méthode d'Euler, décrite dans l'annexe B. La méthode d'Euler est une méthode numérique pour la résolution d'équations différentielles ordinaires. Soit le temps $t \in [0, T]$. L'intervalle $[0, T]$ est divisé en n sous-intervalles $[t_{(j)}, t_{(j+1)}]$, avec $0 \leq j \leq n-1$ et $t_{(j)} < t_{(j+1)}$, tel que $[0, T] = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} [t_{(j)}, t_{(j+1)}]$. Soit $\Delta t_{(j)} = t_{(j+1)} - t_{(j)}$ le pas de temps à l'itération j . Avec

la méthode d'Euler, une solution approchée du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est calculée à chaque temps $t_{(j)}$, notée $\mathbf{A}(t_{(j)})$ ou $\mathbf{A}_{(j)}$ pour simplifier. Soit $\theta \in [0, 1]$. A l'itération $j+1$, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et sa dérivée $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ sont approchés, avec les équations (B.5) et

3.2. MODÉLISATION DISCRÈTE AVEC LES ÉLÉMENTS FINIS

(B.6) de la méthode d'Euler, tels que :

$$\mathbf{A} = \theta \mathbf{A}_{(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{A}_{(j)}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mathbf{A}_{(j+1)} - \mathbf{A}_{(j)}}{\Delta t_{(j)}}. \quad (3.12)$$

En appliquant les formules (3.11) et (3.12) sur les potentiels \mathbf{A} et v (dédit de V grâce à l'équation (3.10)), la formulation matricielle symétrique en $\mathbf{A} - V$ (3.9) est telle que :

$$\begin{aligned} \left(\theta R_{RR_\nu} + \frac{R_{AA_\sigma}}{\Delta t_{(j)}} \right) \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)} + \frac{R_{AG_\sigma}}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)} &= \left(-(1 - \theta) R_{RR_\nu} + \frac{R_{AA_\sigma}}{\Delta t_{(j)}} \right) \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j)} \\ &+ \frac{R_{AG_\sigma}}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j)} + \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} + \mathbf{M}_{\mathbf{RB}_{r\nu}}, \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\frac{R_{AG_\sigma}^T}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)} + \frac{R_{GG_\sigma}}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)} = \frac{R_{AG_\sigma}^T}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j)} + \frac{R_{GG_\sigma}}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j)}, \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (3.13c)$$

$$v_{(j+1)}|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.13d)$$

avec

- $\theta \in [0, 1]$ fixé par le schéma choisi (voir l'annexe B),
- $R_{RR_\nu} = \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}$,
- $R_{AA_\sigma} = \left[(\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}$,
- $\Delta t_{(j)}$ le pas de temps,
- $\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)} = [A_{a_k(j+1)}]_{1 \leq k \leq n_A}$ (au temps $t_{(j+1)}$),
- $\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j)} = [A_{a_k(j)}]_{1 \leq k \leq n_A}$ (au temps $t_{(j)}$),
- $R_{AG_\sigma} = \left[(\sigma \mathbf{grad} w_{n_i}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}$,
- $\mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)} = [v_{n_i(j+1)}]_{1 \leq i \leq n_N}$ (au temps $t_{(j+1)}$),
- $\mathbf{v}_{\mathbf{n}(j)} = [v_{n_i(j)}]_{1 \leq i \leq n_N}$ (au temps $t_{(j)}$),
- $\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} = \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}$,
- $\mathbf{M}_{\mathbf{RB}_{r\nu}} = \left[(\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}$,
- $R_{GG_\sigma} = \left[(\sigma \mathbf{grad} w_{n_i}, \mathbf{grad} w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}$.

La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.13) avec la méthode d'Euler permet de calculer le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel scalaire électrique V . Cependant, si les matériaux sont non-linéaires, alors la perméabilité μ , la réductivité ν , la conductivité σ et la résistivité ρ dépendent aussi des inconnues \mathbf{A} et V de la formulation en $\mathbf{A} - V$. Alors, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.13), devenue une équation non-linéaire.

3.2.1.3 Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson

La loi de comportement d'un matériau peut ne pas être linéaire. Si la loi de comportement magnétique $\mathbf{H} = \nu (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)$ (1.15f) n'est pas linéaire, alors la réductivité ν dépend du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , car ν dépend de \mathbf{B} (1.15f) et $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ (1.10). Si la loi d'Ohm locale $\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$ (1.15g) n'est pas linéaire, alors la conductivité σ dépend des potentiels \mathbf{A} et V ,

car σ dépend d' \mathbf{E} (1.15g) et $\mathbf{E} = -\frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{grad} \ v)}{\partial t}$ (1.16)–(3.10). La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.13) est plus difficile à résoudre avec ν et σ dépendant des potentiels \mathbf{A} et v . Pour la résoudre, la méthode de Newton-Raphson, expliquée dans l'annexe C, est utilisée.

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui permet de trouver numériquement une approximation précise des racines d'une fonction. A chaque itération, elle consiste à calculer des vecteurs $\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)}$ à partir des vecteurs $\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n)}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n)}$ obtenus à l'itération précédente :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n)} + \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} = \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n)} + \Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)}. \quad (3.15)$$

Les incréments $\Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)}$ et $\Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)}$ sont calculés en résolvant la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.13) avec la méthode de Newton-Raphson :

$$\begin{pmatrix} \theta R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} + \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{AA} \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} & \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{AG} \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \\ \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{AG}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} & \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{GG} \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} \\ \Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} + \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}^{(n)}} - \mathbf{M}_{\mathbf{RH}^{(n)}} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{GJ}^{(n)}} \end{pmatrix}, \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (3.16b)$$

$$v_{(j+1)}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.16c)$$

où

- $\theta \in [0, 1]$ fixé par le schéma choisi (voir l'annexe B),
- $\mathbf{B}^{(n)} = \theta \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} + (1 - \theta) \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_{(j)}$,
- $\mathbf{H}^{(n)} = \nu (\mathbf{B}^{(n)}) \left[\theta (\mathbf{rot} \ \mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{B}_{\mathbf{r}(j+1)}) + (1 - \theta) (\mathbf{rot} \ \mathbf{A}_{(j)} - \mathbf{B}_{\mathbf{r}(j)}) \right]$,
- $\mathbf{E}^{(n)} = -\frac{1}{\Delta t_{(j)}} \left[\mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{A}_{(j)} + \mathbf{grad} \ v_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{grad} \ v_{(j)} \right]$,
- $\mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)} = -\frac{1}{\Delta t_{(j)}} \sigma (\mathbf{E}^{(n)}) \left[\mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{A}_{(j)} + \mathbf{grad} \ v_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{grad} \ v_{(j)} \right]$,
- $R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}$,
- $R_{AA} \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}$,
- $R_{AG} \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \mathbf{grad} \ w_{n_i}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}$,
- $R_{GG} \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \mathbf{grad} \ w_{n_i}, \mathbf{grad} \ w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}$,
- $\Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n)} = \left[\Delta A_{a_k(j+1)}^{(n+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}$,
- $\Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} = \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} - \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n)} = \left[\Delta v_{n_i(j+1)}^{(n+1)} \right]_{1 \leq i \leq n_N}$,

3.2. MODÉLISATION DISCRÈTE AVEC LES ÉLÉMENTS FINIS

$$\begin{aligned}
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{J}_e^{(n)}, \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{H}^{(n)}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{J}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{J}_e^{(n)}, \mathbf{grad} w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}.
\end{aligned}$$

La forme matricielle (3.16) exprime la formulation en $\mathbf{A}-V$ pour des matériaux non-linéaires avec $\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} = \nu (\mathbf{B}^{(n)}) + \frac{\partial \nu (\mathbf{B}^{(n)})}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} (\mathbf{B}^{(n)} - \mathbf{B}_r)$ et $\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \sigma (\mathbf{E}^{(n)}) + \frac{\partial \sigma (\mathbf{E}^{(n)})}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \mathbf{E}^{(n)}$.

La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) en régime transitoire a été détaillée avec la méthode d'Euler pour approcher les dérivées en temps et avec la méthode de Newton-Raphson pour des matériaux non-linéaires. Dans la prochaine sous-section, la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ sera étudiée sous forme matricielle en régime transitoire.

3.2.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

La formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ peut être déduite, avec les méthodes d'Euler et de Newton-Raphson (voir les annexes B et C), de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6), comme dans la sous-section 3.2.1 pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, telle que :

$$\begin{pmatrix} \theta R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} + \frac{1}{\Delta t(j)} R_{AA} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} & \frac{1}{\Delta t(j)} R_{AG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \\ \frac{1}{\Delta t(j)} R_{AG}^T \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} & \frac{1}{\Delta t(j)} R_{GG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{r}a}^{(n+1)} \\ \Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{rot}\mathbf{A}_{s(j+1)}\nu} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma} + \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}^{(n)}} - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}^{(n)}} \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma} + \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{J}^{(n)}} \end{pmatrix}, \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{r}a}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (3.17b)$$

$$v_{(j+1)}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.17c)$$

où

$$\begin{aligned}
- \theta &\in [0, 1] \text{ fixé par le schéma choisi (voir l'annexe B),} \\
- \mathbf{B}^{(n)} &= \theta \left(\mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j+1)}^{(n)} + \mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} \right) + (1 - \theta) \left(\mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j)} + \mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j)} \right), \\
- \mathbf{H}^{(n)} &= \nu (\mathbf{B}^{(n)}) \left[\theta \left(\mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j+1)}^{(n)} + \mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} \right) + (1 - \theta) \left(\mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j)} + \mathbf{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j)} \right) - \mathbf{B}_r \right], \\
- \mathbf{E}^{(n)} &= -\frac{1}{\Delta t(j)} \left[\mathbf{A}_{\mathbf{r}(j+1)}^{(n)} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j)} + \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j)} + \mathbf{grad} v_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{grad} v_{(j)} \right], \\
- \mathbf{J}_e^{(n)} &= -\frac{\sigma (\mathbf{E}^{(n)})}{\Delta t(j)} \left[\mathbf{A}_{\mathbf{r}(j+1)}^{(n)} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j)} + \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j)} + \mathbf{grad} v_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{grad} v_{(j)} \right], \\
- R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\
- R_{AA} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- R_{AG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \text{ grad } w_{n_i}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}, \\
- R_{GG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \text{ grad } w_{n_i}, \text{ grad } w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}, \\
- \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{r}_a(j+1)}^{(n+1)} &= \mathbf{A}_{\mathbf{r}_a(j+1)}^{(n+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}_a(j+1)}^{(n)} = \left[\Delta A_{r_{a_k(j+1)}}^{(n+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}, \\
- \Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} &= \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} - \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n)} = \left[\Delta v_{n_i(j+1)}^{(n+1)} \right]_{1 \leq i \leq n_N}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{R}\text{rot}\mathbf{A}_{s(j+1)}}^\nu &= \left[\left(\nu (\theta \text{ rot } \mathbf{A}_{s(j+1)} + (1 - \theta) \text{ rot } \mathbf{A}_{s(j)}), \text{ rot } \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)}}^\sigma &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s(j+1)}}^\sigma &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \text{ grad } w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{J}_e^{(n)}, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{H}^{(n)}, \text{ rot } \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{J}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{J}_e^{(n)}, \text{ grad } w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}.
\end{aligned}$$

Dans cette sous-section, la formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) a été étudiée, le terme de gauche de cette formulation est identique à celui de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) en remplaçant l'incrément $\Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)}$ par $\Delta \mathbf{A}_{\mathbf{r}_a(j+1)}^{(n+1)}$. Cependant, le terme de droite, ou terme source, est différent pour les formulations matricielles en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17). Cette différence sera plus détaillée dans le chapitre 4. Pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$, les expressions des grandeurs magnétiques et électriques, \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{J}_e , font apparaître les sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s . Donc, elles dépendent du calcul choisi pour les termes sources, \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s . En revanche pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, ces grandeurs \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{J}_e auront toujours les mêmes expressions, parce qu'elles ne font pas apparaître les termes sources, \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s .

Dans la prochaine section, la résolution des formulations matricielles en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ sera étudiée à l'aide des différents solveurs et des conditions de jauge.

3.3 Résolution des formulations matricielles

3.3.1 Solveurs

Dans la section précédente, la formulation en $\mathbf{A}-V$ a été décrite sous forme matricielle (3.9), à l'aide des éléments finis (décrits dans la section 2.2). Pour simplifier les explications, les formulations étudiées dans cette section seront écrites sans l'application des méthodes d'Euler et de Newton-Raphson. La formulation matricielle en $\mathbf{A}-V$ (3.9) peut être écrite :

$$R \mathbf{X} = \mathbf{M}, \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned} - R &= \begin{pmatrix} R_{RR_\nu} + R_{AA_\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & R_{AG_\sigma} \\ R_{AG_\sigma}^T \frac{\partial}{\partial t} & R_{GG_\sigma} \end{pmatrix}, \\ - \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_a \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix}, \\ - \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{AJ_s} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les inconnues de la formulation en $\mathbf{A}-V$ sont le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}_a = [A_{a_k}]_{1 \leq k \leq n_A}$ sur chaque arête a_k , $1 \leq k \leq n_A$, du maillage Ω_h et le potentiel scalaire électrique $\mathbf{V}_n = [V_{n_i}]_{1 \leq i \leq n_N}$ sur chaque nœud n_i , $1 \leq i \leq n_N$, d' Ω_h . De la même façon, les inconnues de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ sont \mathbf{A}_{r_a} et \mathbf{V}_n . A partir de ces inconnues \mathbf{V}_n , \mathbf{A}_a et \mathbf{A}_{r_a} , il est possible de retrouver la valeur du potentiel scalaire électrique V , du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} ou du potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r en un point \mathbf{x} , avec les décompositions respectives des grandeurs physiques (2.43), (2.44) et (2.45) (décrites dans le paragraphe 2.2.4.5), telle que :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n_N} V_{n_i} w_{n_i}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{n_A} A_{a_k} \mathbf{w}_{a_k}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{A}_r(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{n_A} A_{r_{a_k}} \mathbf{w}_{a_k}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Par conséquent pour déterminer les potentiels V , \mathbf{A} ou \mathbf{A}_r , il faut résoudre un système de la forme $R \mathbf{X} = \mathbf{M}$ (3.18) à l'aide d'un solveur. Il existe deux types de solveurs : les solveurs itératifs et les solveurs directs. Dans les prochains paragraphes, ces deux types de solveurs seront décrits.

3.3.1.1 Direct

Un solveur direct résout un système de la forme $R \mathbf{X} = \mathbf{M}$ (3.18) en une seule étape. La première idée pour déterminer la solution \mathbf{X} est l'inversion de la matrice R pour déterminer la solution $\mathbf{X} = R^{-1} \mathbf{M}$. Cependant, l'inversion d'une matrice est en général difficile. Pour déterminer la solution \mathbf{X} , des solveurs directs existent tels que la méthode de Gauss-Jordan, la décomposition LU , ou la méthode de Cholesky. La méthode de Gauss-Jordan consiste à faire des opérations identiques sur la matrice R et le vecteur \mathbf{M} afin que la matrice R devienne la matrice identité. Lorsque la matrice R est égale à l'identité, le vecteur \mathbf{M} est la solution \mathbf{X} .

du système (3.18). La décomposition LU consiste à décomposer la matrice R en une matrice triangulaire inférieure L (pour Lower) et une matrice triangulaire supérieure U (pour Upper). Pour trouver la solution \mathbf{X} , il suffit alors de résoudre en un premier lieu le système $L \mathbf{Y} = \mathbf{M}$ et en second lieu le système $U \mathbf{X} = \mathbf{Y}$. La méthode de Cholesky est applicable seulement pour une matrice R carrée symétrique définie positive. Cette méthode calcule une matrice L triangulaire inférieure telle que $R = LL^T$.

Dans la suite, le solveur direct, utilisé pour résoudre les formulations, est le solveur MUMPS (Multifrontal Massively Parallel sparse direct Solver). Plus d'explications sur ce solveur sont données dans [Amestoy *et al.*, 2015].

Les solveurs directs fournissent une solution en une seule étape, contrairement aux solveurs itératifs qui procèdent en plusieurs étapes. Dans le prochain paragraphe, les solveurs itératifs seront étudiés.

3.3.1.2 Itératif

Un solveur itératif procède par itérations, comme son nom l'indique, pour résoudre un système de la forme $R \mathbf{X} = \mathbf{M}$ (3.18). Il utilise une solution initiale \mathbf{X}_0 . Puis à chaque itération n , il construit une solution \mathbf{X}_n , en fonction de la solution \mathbf{X}_{n-1} à l'itération $n - 1$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n = R^{-1} \mathbf{M}$. Ces solutions \mathbf{X}_n sont des solutions approchées du système d'équations (3.18). Un solveur itératif converge si et seulement si la suite \mathbf{X}_n converge vers $R^{-1} \mathbf{M}$ quelque soit le choix de \mathbf{X}_0 . En pratique, un critère d'arrêt est défini pour arrêter les itérations lorsqu'une précision de la solution \mathbf{X}_n est atteinte, ainsi qu'un nombre d'itérations maximal dans le cas où la condition du critère d'arrêt n'est jamais atteinte.

Pour résoudre un système d'équations (3.18) avec un solveur itératif, il existe deux classes principales de solveurs : les solveurs itératifs de type point fixe et les solveurs itératifs de sous-espace de Krylov.

3.3.1.2.1 Point fixe

Les solveurs itératifs de type point fixe résolvent un système d'équations (3.18) avec une équation de correction, qui correspond à la mesure de l'erreur de la solution \mathbf{X}_n à l'itération n . Ces solveurs sont simples à mettre en œuvre. Cependant, leur convergence est assurée seulement pour certains types de matrices.

Il existe différents solveurs itératifs de point fixe tels que la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel, ou la méthode S.O.R. (Successive Over-Relaxation).

3.3.1.2.2 Krylov

Les solveurs itératifs de Krylov approchent la solution par un vecteur dans un sous-espace de Krylov, qui a une erreur minimale. Ces solveurs itératifs convergent rapidement, souvent en moins de N itérations, avec N la taille du système d'équations (3.18).

Le solveur itératif de Krylov le plus connu est la méthode du gradient conjugué. Mais, il existe d'autres solveurs itératifs de Krylov tels que la méthode de généralisation de minimisation du résidu ou GMRES (Generalized Minimal RESidual), BiCG (BiConjugate Gradient Method), ou ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient).

Dans la suite, le solveur itératif, utilisé pour résoudre les formulations, est le solveur ICCG [Fujiwara *et al.*, 1993].

3.3. RÉOLUTION DES FORMULATIONS MATRICIELLES

Dans cette sous-section, des solveurs, itératifs ou directs, ont été décrits pour trouver la solution $(\mathbf{A}_a, \mathbf{V}_n)$ à la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.9). De la solution $(\mathbf{A}_a, \mathbf{V}_n)$, il est possible d'en déduire le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel scalaire électrique V .

Dans la prochaine sous-section, les conditions de jauge, permettant de rendre la solution d'un système d'équations (3.18) unique, seront étudiées.

3.3.2 Condition de jauge

Le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est solution de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16). Or, tout champ du type $\mathbf{A} + \mathbf{grad} f$, avec $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque, est également solution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ (3.16), puisque le rotationnel d'un gradient est nul (A.1) (voir annexe A.2.1.1). De même pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17), il n'y a pas de solution unique à cette formulation.

À cause de la non-unicité d' \mathbf{A} et \mathbf{A}_r , les solveurs résolvant les formulations (3.16)-(3.17) trouvent la mauvaise solution ou ont une mauvaise convergence. L'unicité des potentiels vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{A}_r peut être assurée en ajoutant une *condition de jauge*, qui fixe en quelque sorte la fonction f . Dans les prochains paragraphes, des conditions de jauge seront détaillées.

3.3.2.1 Jauge de Coulomb

La première condition de jauge possible est la *jauge de Coulomb* telle que [Coulomb, 1981] :

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \text{ ou } \text{div } \mathbf{A}_r = 0. \quad (3.19)$$

Avec cette jauge (3.19) et le théorème d'Ostrogradski (A.9), décrit dans l'annexe A.2.3.2, la composante normale du potentiel vecteur est continue. Généralement, cette condition de jauge est utilisée lorsque le potentiel vecteur est discrétisé avec les éléments nodaux (voir paragraphe 2.2.4.4). Ici, \mathbf{A} et \mathbf{A}_r sont calculés avec des éléments d'arête (voir paragraphe 2.2.4.4).

Dans le prochain paragraphe, une condition de jauge adaptée pour les éléments d'arête est étudiée.

3.3.2.2 Jauge d'arête

3.3.2.2.1 Définition

Avec des éléments d'arête, la jauge utilisée est [Albanese et Rubinacci, 1990] :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ ou } \mathbf{A}_r \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (3.20)$$

où \mathbf{w} est un champ de vecteur arbitraire qui ne forme pas de boucle (afin d'éviter l'annulation des flux). La condition de jauge (3.20) consiste à annuler la composante du potentiel vecteur selon la direction \mathbf{w} .

3.3.2.2.2 Arbre d'arêtes

Cette jauge peut aussi être définie avec un arbre d'arêtes tel que \mathbf{w} correspond aux arêtes du maillage Ω_h [Preis *et al.*, 1992]-[Dular *et al.*, 1995].

La notion d'arbre est issue de la théorie des graphes. En théorie des graphes, un *graphe* est un ensemble de sommets reliés entre eux par un ensemble d'arêtes. Un *chemin* entre deux sommets d'un graphe est une suite d'arêtes du graphe, avec les deux sommets pour extrémités

du chemin. Alors, un *arbre* est un graphe où aucun chemin du graphe n'a les mêmes extrémités et pour toute paire de sommets du graphe, il existe un chemin avec pour extrémités ces sommets. Alors, il n'existe qu'un seul chemin entre deux sommets quelconques d'un arbre. Un arbre peut être construit à partir d'un graphe et son *co-arbre* contient les arêtes du graphe n'appartenant pas à l'arbre.

Dans notre cas, le graphe correspond au maillage Ω_h . Pour construire un arbre à partir de ce graphe, il est nécessaire que le graphe soit *pondéré*, c'est-à-dire qu'à chaque arête du graphe soit associé un *poids*. Théoriquement, le choix d'un arbre et de ses poids est arbitraire. Pourtant, les expériences numériques montrent que la précision du calcul ainsi que la vitesse de convergence du système dépendent du choix de l'arbre [Golias et Tsiboukis, 1994]. Si un poids identique est imposé sur chaque arête du graphe, les arêtes de l'arbre sont choisies au hasard et celles qui ont un potentiel \mathbf{A} ou \mathbf{A}_r nul à cause de la physique du problème ne sont pas éliminées. Le meilleur choix de poids est alors de prendre \mathbf{w} dans la direction de \mathbf{B} pour \mathbf{A} et \mathbf{A}_r [Ren, 1997]. Ensuite, un arbre de poids minimal est défini, avec par exemple l'algorithme de Kruskal. Puis, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est mis à zéro sur les arêtes de l'arbre. A cause des conditions aux limites $\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}$ (1.17d) (i.e. $A_{a_k} = 0, \forall a_k \in \Gamma_e$) ainsi que $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_r|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}$ (1.18d) (i.e. $A_{r_{a_k}} = 0, \forall a_k \in \Gamma_e$), l'arbre est d'abord cherché sur les frontières Γ_e , puis la recherche est étendue à tout le domaine Ω [Dular *et al.*, 1995].

Sans condition de jauge, la résolution de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) avec un solveur direct aboutit à une mauvaise solution. En revanche, la résolution de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) avec un solveur itératif peut converger sans condition de jauge. Mais dans ce cas, le système de la formulation doit respecter certaines conditions, qui seront décrites dans le prochain paragraphe.

3.3.2.3 Sans jauge

Bien qu'elles soient singulières, la résolution avec un solveur itératif, comme ICCG, des formulations matricielles non jaugées en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) peuvent converger suivant la variable source utilisée et la discrétisation de cette variable.

Les sources peuvent être exprimées par trois variables telles que :

- \mathbf{J}_s la densité de courant source,
- \mathbf{H}_s le champ magnétique source,
- \mathbf{A}_s le potentiel vecteur magnétique source.

Ces variables sont reliées entre elles par les formules telles que :

$$\mathbf{H}_s = \nu_0 \text{ rot } \mathbf{A}_s, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{J}_s = \text{rot } \mathbf{H}_s, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{J}_s = \text{rot } (\nu_0 \text{ rot } \mathbf{A}_s). \quad (3.23)$$

Les sources des formulations en $\mathbf{A} - V$ (3.16) sont calculées à partir de \mathbf{J}_s . Pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$, les sources sont calculées à partir de \mathbf{J}_s et \mathbf{A}_s .

La résolution avec un solveur itératif des formulations en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) convergent lorsque les systèmes non-jaugés sont *compatibles*, c'est-à-dire lorsque le terme source du système (ou le terme de droite) est dans le noyau du terme de gauche [Ren, 1996]. La compatibilité est alors assurée lorsque la densité de courant \mathbf{J}_s est remplacée par le rotationnel d'un champ source et que ce champ source est projeté sur le rotationnel de l'espace des éléments d'arête \mathbf{W}_v^1 (2.29).

Donc, les formulations matricielles en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) deviennent compatible en remplaçant \mathbf{J}_s par $\text{rot } \mathbf{H}_s$ ou par $\text{rot } (\nu_0 \text{ rot } \mathbf{A}_s)$ et en projetant ensuite \mathbf{H}_s ou \mathbf{A}_s sur le

3.3. RÉOLUTION DES FORMULATIONS MATRICIELLES

rotationnel de \mathbf{W}_V^1 (2.29), comme ce sera détaillé dans le chapitre 4. De plus pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$, le terme source $\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s)$ est compatible en le projetant sur le rotationnel de l'espace \mathbf{W}_V^1 (2.29).

Cependant, la condition de jauge par un arbre d'arêtes dégrade fortement la convergence du solveur itératif, en particulier du solveur ICCG [Kameari et Koganezawa, 1997]. En revanche, elle permet au solveur direct, comme MUMPS, de trouver la bonne solution. Sans condition de jauge, la plupart des solveurs directs ne trouvent pas la bonne solution, car le système est singulier.

Donc, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.16)-(3.17) peuvent être résolues soit avec un solveur itératif sans condition de jauge, soit avec un solveur direct et une condition de jauge. Pour des problèmes de petites tailles, le solveur itératif sans condition de jauge résout plus rapidement que le solveur direct avec une condition de jauge par arbre d'arêtes. En revanche, pour des problèmes de grosses tailles, les deux solveurs ont des temps de résolution équivalents.

Dans ce chapitre, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ de la magnétique transitoire ont été étudiées sous leurs formes matricielles pour des matériaux non-linéaires. La convergence de ces formulations dépend du choix de calcul des termes sources. Dans le prochain chapitre, les différents calculs des termes sources des formulations seront donc étudiés.

Conclusion de la partie I

Le but de cette thèse est de développer la formulation en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique en trois dimensions, pour éviter d'introduire des coupures artificielles dans le domaine d'étude lorsqu'il n'est pas simplement connexe.

Dans cette partie, les équations de Maxwell, reliant les grandeurs magnétiques aux grandeurs électriques, les lois de comportement des matériaux et des conditions aux limites ont été décrites pour en déduire les modèles magnétostatique, magnétique transitoire et magnétoharmonique ainsi que les formulations en potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r ou total \mathbf{A} correspondant à chaque modèle.

Ensuite, la modélisation avec les éléments finis a été étudiée. Les potentiels vecteurs magnétiques \mathbf{A} et \mathbf{A}_r sont modélisés avec les éléments finis d'arête, afin de respecter les propriétés de ce potentiel. Le potentiel scalaire électrique V est quant à lui modélisé avec les éléments finis nodaux.

Enfin, la méthode des éléments finis a été appliquée aux formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ en magnétique transitoire pour en déduire le système matriciel à résoudre sur le maillage pour déterminer les valeurs des grandeurs magnétiques et électriques.

Finalement, cette partie a permis de décrire les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ avec les éléments finis en magnétique transitoire. Le terme source de ces formulations est pour l'instant décrit avec la densité de courant source \mathbf{J}_s . Une étude approfondie du calcul des termes sources sera réalisée dans la prochaine partie.

PARTIE II

Étude des termes sources pour les formulations en potentiel vecteur magnétique

Introduction de la partie II

Les trois premiers chapitres de cette thèse ont permis d'introduire deux formulations en potentiel vecteur magnétique : la formulation en $\mathbf{A} - V$ et la formulation en $\mathbf{A}_r - V$. Dans cette première partie, les termes sources des formulations sont décrits avec la densité de courant source \mathbf{J}_s . Cependant, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ ne sont pas compatibles avec la source \mathbf{J}_s (voir la définition dans la section 3.3). C'est pourquoi les termes sources des formulations en potentiel vecteur magnétique seront étudiés dans cette partie : pour rendre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ compatibles et ne pas avoir besoin de condition de jauge avec les solveurs itératifs. De plus, la source \mathbf{J}_s doit être recalculée à chaque fois qu'on en a besoin. Alors, d'autres sources seront calculées par la projection de \mathbf{J}_s et stockées sur le maillage pour les calculer une seule fois.

Dans le quatrième chapitre de cette thèse, les termes sources en \mathbf{J}_s des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ seront étudiés. Dans le logiciel Flux[®], il existe deux types de bobines : les bobines maillées et les bobines non maillées. Ces différents types de bobines seront expliqués dans la première section de ce chapitre. De plus, il est possible de calculer \mathbf{J}_s avec des bobines maillées, mais pas avec des bobines non maillées. Avec des bobines non maillées, il est seulement possible de calculer le champ magnétique source \mathbf{H}_s et le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s . Dans la deuxième section du quatrième chapitre, différentes sources seront calculées par la projection de \mathbf{J}_s , d' \mathbf{H}_s ou d' \mathbf{A}_s sur le maillage et stockées sur ce maillage. Dans la dernière section de ce chapitre, le terme source en \mathbf{J}_s des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ sera remplacée par des termes sources avec les sources calculées par la projection de \mathbf{J}_s , d' \mathbf{H}_s ou d' \mathbf{A}_s sur le maillage.

Dans le cinquième chapitre, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ prenant en compte les différents termes sources pour les bobines maillées ou non décrits dans le chapitre précédent seront testées sur trois dispositifs physiques en trois dimensions. Plusieurs dispositifs sont étudiés pour avoir des cas simples à résoudre et des cas réels, des matériaux linéaires et non-linéaires, du régime statique, harmonique et transitoire et des bobines maillées et non maillées. Ces dispositifs sont : une encoche d'une machine asynchrone en régime statique étudiée avec une bobine maillée ou une bobine non maillée, une machine asynchrone en régime harmonique étudiée avec des bobines non maillées, et le problème 24 du T.E.A.M. Workshop en régime transitoire étudié avec des bobines maillées ou des bobines non maillées. Pour chacune des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ et pour chaque type de bobines (maillées ou non), ces cas tests permettront de définir le meilleur terme source. Ils permettront aussi de définir la formulation la plus générique et la meilleure pour le calcul des sources avec des bobines maillées et non maillées.

Le sixième chapitre montre la modification des termes sources des formulations en potentiel vecteur magnétique, choisis dans le chapitre précédent, pour permettre de prendre en compte le mouvement des dispositifs, qui sera étudié dans la troisième partie de cette thèse. Dans ce chapitre, les termes sources seront calculés sur un domaine réduit, alors que dans les chapitres précédents, ils étaient calculés sur le domaine complet du dispositif. Lorsqu'une partie du dispositif est en mouvement, il faut assurer la continuité des variables entre les parties fixe et mobile.

Pour éviter d'assurer cette continuité, les termes sources sont calculés sur un domaine réduit, correspondant à la partie fixe ou mobile et englobant les bobines. Le calcul des termes sources sera validé sur trois dispositifs en trois dimensions : un tore avec une bobine maillée puis une bobine non maillée, la machine asynchrone du chapitre 5 avec des bobines non maillées et encore le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines maillées. La validation permettra de vérifier que le terme source sur le domaine réduit est équivalent au terme source sur le domaine complet.

Chapitre 4

Termes sources des formulations en potentiel vecteur magnétique

Sommaire

4.1	Différents types de bobines	69
4.1.1	Bobines non maillées	69
4.1.2	Bobines maillées	70
4.1.3	Récapitulatif	70
4.2	Calcul des termes sources	71
4.2.1	Equations	71
4.2.1.1	Pour des bobines non maillées	71
4.2.1.1.1	\mathbf{H}_s	71
4.2.1.1.2	\mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$	71
4.2.1.1.3	\mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	72
4.2.1.1.4	\mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	72
4.2.1.2	Pour des bobines maillées	73
4.2.1.2.1	\mathbf{H}_j , projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	73
4.2.1.2.2	\mathbf{A}_j , projection de \mathbf{J}_s	73
4.2.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	74
4.2.2.1	Pour des bobines non maillées	74
4.2.2.1.1	\mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$	74
4.2.2.1.2	\mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	75
4.2.2.1.3	\mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	77
4.2.2.2	Pour des bobines maillées	78
4.2.2.2.1	\mathbf{H}_j , projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	78
4.2.2.2.2	\mathbf{A}_j , projection de \mathbf{J}_s	79
4.3	Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires avec les termes sources	80
4.3.1	Formulations pour des problèmes magnétiques transitoires	80
4.3.1.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	80
4.3.1.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	81
4.3.2	Formulations faibles	81
4.3.2.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	81
4.3.2.1.1	\mathbf{H}_s	82
4.3.2.1.2	\mathbf{H}_j	82
4.3.2.1.3	\mathbf{A}_j	82

4.3.2.1.4	Récapitulatif	83
4.3.2.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	83
4.3.2.2.1	\mathbf{H}_s	83
4.3.2.2.2	\mathbf{A}_j	84
4.3.2.2.3	Récapitulatif	85
4.3.3	Modélisation discrète avec les éléments finis	85
4.3.3.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	85
4.3.3.1.1	\mathbf{H}_s	86
4.3.3.1.2	\mathbf{H}_j	86
4.3.3.1.3	\mathbf{A}_j	86
4.3.3.1.4	Récapitulatif	87
4.3.3.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	87
4.3.3.2.1	\mathbf{H}_s	87
4.3.3.2.2	\mathbf{A}_j	89
4.3.3.2.3	Récapitulatif	90

4.1. DIFFÉRENTS TYPES DE BOBINES

Dans ce chapitre, le calcul des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ de la magnétique transitoire (3.16)–(3.17), détaillées dans le chapitre 3, sera étudié en fonction des trois grandeurs sources : \mathbf{J}_s la densité de courant source, \mathbf{H}_s le champ magnétique source et \mathbf{A}_s le potentiel vecteur magnétique source [Ferrouillat *et al.*, 2015].

4.1 Différents types de bobines

Dans le logiciel Flux[®], il existe deux types de bobines : les bobines non maillées et les bobines maillées. Des exemples de géométrie et de maillage sont représentés sur la figure 4.1 pour ces deux types de bobines.

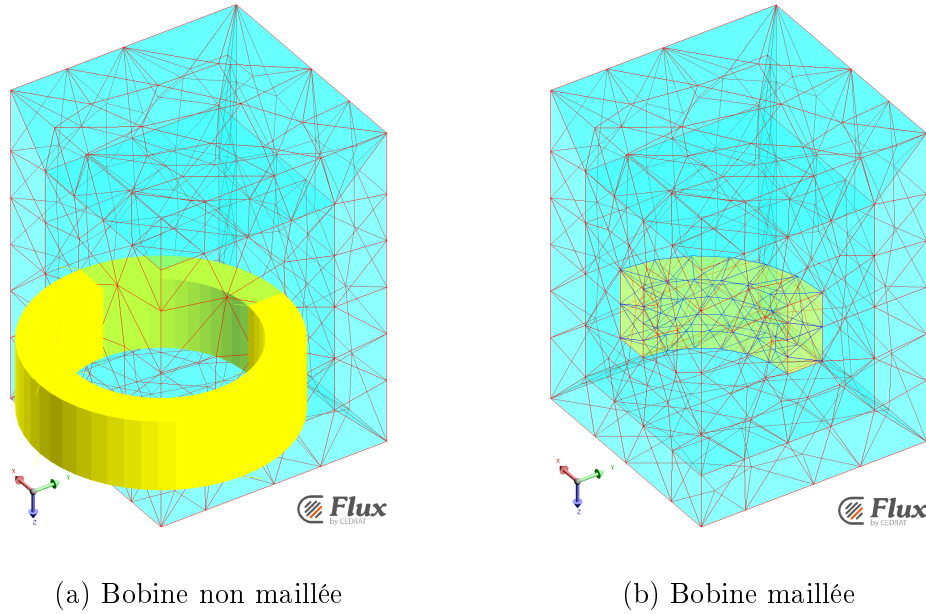


FIGURE 4.1 – Maillages d’une bobine non maillée et d’une bobine maillée

Le calcul des termes sources dans les bobines peut être effectué à partir de trois grandeurs : le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s , le champ magnétique source \mathbf{H}_s ou la densité de courant source \mathbf{J}_s . La source \mathbf{J}_s peut être calculée pour des bobines dont le maillage correspond à la géométrie de la bobine, à partir du courant circulant dans la bobine et de la section des facettes du maillage. Les sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s peuvent être calculées analytiquement [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982b] à partir de la loi de Biot et Savart (A.17), décrite dans l’annexe A.3, pour des bobines dont les géométries sont connues. [Urankar, 1980] décrit les formes analytiques pour calculer les sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s pour les bobines circulaires filaires, [Urankar, 1982a] décrit les formes analytiques pour les bobines circulaires minces et [Urankar, 1982b] les formes analytiques pour les bobines circulaires à section rectangulaire.

Dans les prochaines sous-sections, la géométrie, le maillage, ainsi que le calcul des termes sources seront détaillés pour les bobines non maillées et les bobines maillées.

4.1.1 Bobines non maillées

Les bobines non maillées sont composées de segments et d’arcs de cercle, pour lesquels le centre, le rayon, les dimensions et la section sont définis. Leur géométrie est donc pré-définie. Le maillage est réalisé sans les bobines. Donc, les bobines non maillées possèdent un maillage

mais il ne correspond pas à leur géométrie, comme sur la figure 4.1a. Finalement, l'avantage de ces bobines est que leur géométrie est définie facilement et rapidement.

Le terme source \mathbf{J}_s ne peut pas être calculé dans ce cas, car le maillage de ces bobines ne correspond pas à leur géométrie. En revanche, leur géométrie est connue, elle est choisie par l'utilisateur. Donc dans les bobines non maillées, seuls les termes sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s peuvent être calculés.

Les termes sources des formulations en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) sont définis à partir de \mathbf{J}_s . Les termes sources des formulations en $\mathbf{A}_r - V$ sont de plus définis avec \mathbf{A}_s . Avec les équations (3.22) et (3.23) liant \mathbf{J}_s à \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s , les termes sources des formulations en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) peuvent être exprimés en fonction de la source \mathbf{A}_s et/ou de la source \mathbf{H}_s . En général, la formulation utilisée avec des bobines non maillées est la formulation en $\mathbf{A}_r - V$.

Dans cette sous-section, les bobines non maillées ont été détaillées, ainsi que le calcul des termes sources pour ces bobines. Dans la prochaine sous-section, les bobines maillées seront décrites.

4.1.2 Bobines maillées

La géométrie d'une bobine maillée est définie par l'utilisateur du logiciel Flux[®] comme pour les autres régions de son projet. Le maillage de la bobine est effectué au même moment et de la même façon que pour toutes les autres régions du projet. Sur la figure 4.1b, un exemple de géométrie et de maillage est donné pour une bobine maillée.

La source \mathbf{J}_s peut être calculée dans ce cas, puisque la bobine a un maillage correspondant à la géométrie. En revanche, les sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s ne peuvent pas être calculées, car la géométrie de ces bobines n'est pas standard, l'utilisateur peut définir une bobine de forme quelconque.

4.1.3 Récapitulatif

Finalement, les sources sont calculées avec le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s ou le champ magnétique source \mathbf{H}_s dans les bobines non maillées et avec la densité de courant source \mathbf{J}_s dans les bobines maillées.

Les termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$ (3.16) sont définies à partir de \mathbf{J}_s , et pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) à partir de \mathbf{J}_s et d' \mathbf{A}_s . Dans la littérature, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est généralement utilisée avec des bobines maillées [Biro et Preis, 1989]-[Biro *et al.*, 1996] et la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ avec des bobines non maillées [Biro *et al.*, 1999]-[Biro et Preis, 2000]-[Xu et Simkin, 2004]. Cependant, notre but est de trouver une formulation générique pouvant être utilisée avec des bobines non maillées, des bobines maillées, ou les deux types de bobines.

Dans les prochaines sections, le calcul des termes sources sera étudié pour toutes les formulations avec des bobines non maillées, puis avec des bobines maillées. Ceci permettra de définir des formulations génériques en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ avec des bobines non maillées et maillées.

4.2 Calcul des termes sources

Les sources peuvent être exprimées dans les bobines non maillées par le champ magnétique \mathbf{H}_s ou par le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}_s et dans les bobines maillées par la densité de courant \mathbf{J}_s . À partir de ces sources, différents calculs de termes sources seront définis, tout en respectant la compatibilité du système, définie dans le paragraphe 3.3.2.3.

4.2.1 Equations

4.2.1.1 Pour des bobines non maillées

Pour des bobines non maillées, les sources calculées sont le champ magnétique source \mathbf{H}_s et le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s , par des formules analytiques [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982b] déduites de la loi de Biot et Savart (A.17) (voir l’annexe A.3). De plus avec les sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s , les systèmes sont compatibles [Ferrouillat *et al.*, 2015].

4.2.1.1.1 \mathbf{H}_s

Le calcul des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.16)–(3.17) est réalisé à partir de la densité de courant source \mathbf{J}_s . La source \mathbf{J}_s est remplacée par le champ magnétique source \mathbf{H}_s d’après l’équation $\mathbf{J}_s = \mathbf{rot} \mathbf{H}_s$ (3.22), car \mathbf{J}_s ne peut pas être calculé avec des bobines non maillées alors que c’est possible pour \mathbf{H}_s . Alors, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.16)–(3.17) avec la source \mathbf{H}_s sont compatibles (voir la sous-section 3.3.2.3).

Finalement, le calcul des termes sources pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ peut être effectué à partir d’ \mathbf{H}_s et pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ à partir d’ \mathbf{A}_s et d’ \mathbf{H}_s , calculé à l’aide des formules analytiques de [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982b].

Le champ source \mathbf{H}_s n’est pas le seul moyen de calculer les termes sources dans les bobines non maillées, les termes sources peuvent aussi être calculées à partir du potentiel vecteur source \mathbf{A}_s . D’après l’équation $\mathbf{J}_s = \mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s)$ (3.23), la source \mathbf{J}_s peut être remplacée par \mathbf{A}_s . Cependant, il n’est pas possible de calculer $\mathbf{rot} (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_s)$ à partir des formules analytiques de [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982b].

Alors, le calcul des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ ne peut pas être réalisé à partir du potentiel \mathbf{A}_s .

Néanmoins en utilisant les formules d’Urankar [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982b], il est nécessaire de calculer \mathbf{H}_s à chaque fois qu’on en a besoin. Par exemple en magnétique transitoire, il faut calculer \mathbf{H}_s à chaque pas de temps. Dans les prochains paragraphes, notre volonté est donc de calculer \mathbf{H}_s une seule fois, de le projeter sur le maillage et de le stocker.

4.2.1.1.2 \mathbf{H}_j , projection d’ \mathbf{H}_s avec la norme de $L^2(\Omega)$

Le but de ce paragraphe est de projeter la source \mathbf{H}_s sur le maillage Ω_h pour obtenir \mathbf{H}_j , le champ magnétique source projeté.

Une *projection* cherche à minimiser pour tout point du domaine Ω la distance entre une variable, \mathbf{H}_s , et son projeté, \mathbf{H}_j , sur le maillage Ω_h [Journeaux, 2013]. La *distance* entre deux points x et y , $d(x, y)$, est définie, dans un espace vectoriel normé, par la norme de la différence entre les deux points, c’est-à-dire $d(x, y) = \|y - x\|$. Donc, une projection peut se faire sur plusieurs espaces et plusieurs normes.

Premièrement, la projection peut se faire sur l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Alors la pré-résolution pour calculer $\mathbf{H}_j \in \mathbf{E}_h^1(\Omega)$ sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , par la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.8), est telle que :

$$\mathbf{H}_j = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{X} - \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2. \quad (4.1)$$

Cependant, cette projection n'est pas faite sur le bon espace, puisqu' \mathbf{H}_s appartient à l'espace $\mathbf{E}_h^1(\Omega)$, un sous-espace d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Secondement, la projection peut alors se faire sur l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. La pré-résolution pour calculer $\mathbf{H}_j \in \mathbf{E}_h^1(\Omega)$ sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , par la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.16), est telle que [Wang *et al.*, 2013] :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_j &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \|\mathbf{X} - \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \left(\|\mathbf{X} - \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{X} - \mathbf{rot} \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Cependant, il n'est pas possible de calculer le rotationnel du champ magnétique source \mathbf{H}_s à partir des formules analytiques [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982b] déduite de la loi de Biot et Savart (A.17), décrite dans l'annexe A.3. Donc, la pré-résolution en \mathbf{H}_j (4.2) à partir de la projection d' \mathbf{H}_s sur $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ne peut pas être réalisée.

Finalement, la projection d' \mathbf{H}_s sur l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas effectuée sur le bon espace. Le bon espace pour projeter \mathbf{H}_s est $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, mais dans ce cas, $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s$ ne peut pas être calculé. Donc dans le prochain paragraphe, la projection d' \mathbf{A}_s sur $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ sera développée.

4.2.1.1.3 \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Dans ce paragraphe, la projection des sources \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s sur le maillage Ω_h avec $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ sera étudiée pour obtenir \mathbf{A}_j , le potentiel vecteur magnétique source projeté. En notant que le rotationnel d' \mathbf{A}_s peut être remplacé par $\mu_0 \mathbf{H}_s$ (3.21), la pré-résolution pour calculer $\mathbf{A}_j \in \mathbf{E}_e^1(\Omega)$ sur les éléments d'arête d' Ω_h , par la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.16), est telle que [Wang *et al.*, 2013] :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}_s\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \left(\|\mathbf{X} - \mathbf{A}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{X} - \mu_0 \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans la section 5.1 de la validation du calcul des termes sources, il sera montré que la pré-résolution en \mathbf{A}_j calculée par la projection avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ converge lentement. Alors dans le prochain paragraphe, la projection sera toujours réalisée sur l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ mais avec sa semi-norme plutôt que sa norme (2.8), afin de réduire les temps de calcul.

4.2.1.1.4 \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Dans ce paragraphe, la projection de la source \mathbf{H}_s sur le maillage Ω_h avec l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ sera aussi étudiée pour obtenir \mathbf{A}_j , le potentiel vecteur magnétique source projeté. Cependant,

4.2. CALCUL DES TERMES SOURCES

la projection ne sera plus effectuée avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.16), mais avec sa semi-norme. La semi-norme $|\cdot|$ d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ est définie telle que :

$$|\mathbf{a}|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} = \|\mathbf{rot} \ \mathbf{a}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.4)$$

La pré-résolution pour calculer $\mathbf{A}_j \in \mathbf{E}_e^1(\Omega)$ sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (4.4), est telle que :

$$\mathbf{A}_j = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} |\mathbf{X} - \mathbf{A}_s|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \|\mathbf{rot} \ \mathbf{X} - \mu_0 \ \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2. \quad (4.5)$$

Les différentes façons de calculer les termes sources avec des bobines non maillées ont été étudiées dans ce paragraphe. Dans le prochain paragraphe, le calcul des termes sources sera détaillé pour des bobines maillées.

4.2.1.2 Pour des bobines maillées

Pour des bobines maillées, seule la densité de courant source \mathbf{J}_s peut être calculée. Or les formulations ne sont pas compatibles avec \mathbf{J}_s (voir le paragraphe 3.3.2.3). Pour rendre les systèmes compatibles, la source \mathbf{J}_s sera donc projetée sur l'espace des éléments d'arête, $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

4.2.1.2.1 \mathbf{H}_j , projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Pour avoir un système compatible, il est possible d'utiliser le rotationnel d' \mathbf{H}_s (3.22) à la place de \mathbf{J}_s . Cependant, la source \mathbf{H}_s est inconnue pour des bobines maillées. Alors la pré-résolution pour calculer $\mathbf{H}_j \in \mathbf{E}_h^1(\Omega)$ sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (4.4), est telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_j &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \|\mathbf{rot} \ \mathbf{X} - \mathbf{J}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \|\mathbf{rot} \ \mathbf{X} - \mathbf{rot} \ \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2, \\ &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} |\mathbf{X} - \mathbf{H}_s|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cette pré-résolution (4.6) rend les formulations compatibles, car la source \mathbf{J}_s est remplacée par le rotationnel de la source \mathbf{H}_j .

Dans la formulation en $\mathbf{A}_r - V$, il est aussi nécessaire de calculer \mathbf{A}_s . Cependant pour des bobines maillées, seule la source \mathbf{J}_s peut être décrite. Dans le prochain paragraphe, les sources \mathbf{J}_s et \mathbf{A}_s seront projetées pour calculer un potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j .

4.2.1.2.2 \mathbf{A}_j , projection de \mathbf{J}_s

Dans les bobines maillées, la source \mathbf{A}_s ne peut pas être calculée analytiquement, mais c'est possible pour la source \mathbf{J}_s . D'après l'équation $\mathbf{J}_s = \mathbf{rot}(\nu_0 \ \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_s)$ (3.23), il est possible de calculer \mathbf{A}_s en fonction de \mathbf{J}_s . Dans ce paragraphe, le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j est calculé en fonction de \mathbf{J}_s , d'après l'équation (3.23), tel que :

$$\mathbf{rot}(\nu_0 \ \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_j) = \mathbf{J}_s \quad (4.7)$$

Cette pré-résolution (4.7) rend les formulations compatibles, car la source \mathbf{J}_s est remplacée par $\mathbf{rot}(\nu_0 \ \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_j)$.

Les équations des pré-résolutions pour calculer les termes sources avec des bobines non maillées et des bobines maillées ont été décrites. Dans la prochaine sous-section, la modélisation discrète de ces pré-résolutions sera détaillée avec les éléments finis.

4.2.2 Modélisation discrète avec les éléments finis

Le but de cette sous-section est de mettre sous forme matricielle les pré-résolutions pour calculer les termes sources, qui ont été détaillées à partir d'une résolution éléments finis dans la sous-section précédente 4.2.1.

4.2.2.1 Pour des bobines non maillées

Dans le paragraphe 4.2.1.1, quatre calculs de termes sources ont été décrits pour des bobines non maillées. Le calcul du champ magnétique source \mathbf{H}_s , décrit dans le paragraphe 4.2.1.1.1, n'est pas fait sur le maillage Ω_h , il ne nécessite donc pas de pré-résolution. Dans ce paragraphe, la modélisation discrète des pré-résolutions pour calculer les termes sources sur le domaine Ω sera décrite pour le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et pour le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j avec la norme et la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ [Ferrouillat *et al.*, 2015].

4.2.2.1.1 \mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$

La pré-résolution en \mathbf{H}_j (4.1) sur le domaine Ω , décrite dans le paragraphe 4.2.1.1.2 et calculée par la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.8), consiste à minimiser une fonctionnelle, notée G , telle que :

$$\mathbf{H}_j = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\Omega)} G(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{X} - \mathbf{H}_s\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\Omega)} (\mathbf{X} - \mathbf{H}_s, \mathbf{X} - \mathbf{H}_s)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.8)$$

La variable \mathbf{H}_j de la pré-résolution (4.8) est définie au niveau discret à l'aide de la méthode des éléments finis : $\mathbf{H}_j \in \mathbf{W}_h^1(\Omega)$, avec $\mathbf{W}_h^1(\Omega)$ l'espace des éléments finis d'arête. Similairement à la décomposition du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} sur le maillage Ω_h à l'aide des fonctions de forme d'arête (2.44) du paragraphe 2.2.4.5, la décomposition de la source projetée \mathbf{H}_j dans l'espace $\mathbf{W}_h^1(\Omega)$ est telle que :

$$\mathbf{H}_j = \sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} \mathbf{w}_{a_k}, \quad (4.9)$$

avec $H_{j_{a_k}}$ la circulation du champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j sur l'arête a_k .

En injectant la décomposition d' \mathbf{H}_j (4.9) sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , la fonctionnelle G (4.8) en \mathbf{H}_j devient :

$$G(\mathbf{H}_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} \mathbf{w}_{a_k} - \mathbf{H}_s, \sum_{l=1}^{n_A} H_{j_{a_l}} \mathbf{w}_{a_l} - \mathbf{H}_s \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.10)$$

L'inconnue de la pré-résolution (4.8) est la source projetée \mathbf{H}_j . Sa décomposition dans la base de $\mathbf{W}_h^1(\Omega)$ donne les valeurs $H_{j_{a_l}}$ sur les arêtes a_l , avec $1 \leq l \leq n_A$. La pré-résolution en \mathbf{H}_j (4.8) consiste à trouver le minimum de la fonctionnelle G dans le domaine Ω . Or, le minimum de G (4.10) est obtenu lorsque ses dérivées en $H_{j_{a_l}}$, avec $1 \leq l \leq n_A$, s'annulent telles que :

$$\frac{\partial G(\mathbf{H}_j)}{\partial H_{j_{a_l}}} = \left(\sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} \mathbf{w}_{a_k} - \mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall a_l \in A. \quad (4.11)$$

4.2. CALCUL DES TERMES SOURCES

Donc, le problème à résoudre est, avec l'équation (4.11), tel que :

$$\sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} (\mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (4.12)$$

De plus, il faut ajouter une condition à la limite à cette équation (4.12), déduite de la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.15h) du modèle magnétique transitoire, décrit dans la section 1.3, telle que :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

Donc, la pré-résolution sous forme matricielle en \mathbf{H}_j par la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (2.8) est, d'après l'équation (4.12) et la condition à la limite (4.13), telle que :

$$R_{AA} \mathbf{H}_{j_a} = \mathbf{M}_{A\mathbf{H}_s}, \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{H}_{j_a}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (4.14b)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{AA} &= \left[(\mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{H}_{j_a} &= [H_{j_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{A\mathbf{H}_s} &= \left[(\mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

La forme matricielle de la pré-résolution en \mathbf{H}_j par la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ a été donnée. Le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j n'est pas le seul moyen de calculer les termes sources, il y a aussi le potentiel vecteur magnétique projeté \mathbf{A}_j . Dans le prochain paragraphe, la modélisation discrète de la pré-résolution en \mathbf{A}_j avec la projection sur l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ sera décrite.

4.2.2.1.2 \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

La pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.3) sur le domaine Ω , décrite dans le paragraphe 4.2.1.1.3 et calculée par la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.16), consiste à minimiser une fonctionnelle, notée H , telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &= \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}_s\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2, \\ &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} \left[(\mathbf{X} - \mathbf{A}_s, \mathbf{X} - \mathbf{A}_s)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\mathbf{rot} \mathbf{X} - \mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{X} - \mu_0 \mathbf{H}_s)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

La variable \mathbf{A}_j de la pré-résolution (4.15) est définie au niveau discret à l'aide de la méthode des éléments finis : $\mathbf{A}_j \in \mathbf{W}_e^1(\Omega)$, avec $\mathbf{W}_e^1(\Omega)$ l'espace des éléments finis d'arête. Similairement à la décomposition du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (2.44) du paragraphe 2.2.4.5 et du champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j (4.9) du paragraphe 4.2.2.1.1 sur le maillage Ω_h à l'aide des fonctions de forme d'arête, la décomposition de la source projetée \mathbf{A}_j dans l'espace $\mathbf{W}_e^1(\Omega)$ est telle que :

$$\mathbf{A}_j = \sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \quad (4.16)$$

avec $A_{j_{a_k}}$ la circulation du potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j sur l'arête a_k .

En injectant la décomposition d' \mathbf{A}_j (4.16) sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , la fonctionnelle H (4.15) en \mathbf{A}_j devient :

$$H(\mathbf{A}_j) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{w}_{a_k} - \mathbf{A}_s, \sum_{l=1}^{n_A} A_{j_{a_l}} \mathbf{w}_{a_l} - \mathbf{A}_s \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k} - \mu_0 \mathbf{H}_s, \sum_{l=1}^{n_A} A_{j_{a_l}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} - \mu_0 \mathbf{H}_s \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]. \quad (4.17)$$

L'inconnue de la pré-résolution (4.15) est la source projetée \mathbf{A}_j . Sa décomposition dans la base de $\mathbf{W}_e^1(\Omega)$ donne les valeurs $A_{j_{a_l}}$ sur les arêtes a_l , avec $1 \leq l \leq n_A$. La pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.15) consiste à trouver le minimum de la fonctionnelle H dans le domaine Ω . Or, le minimum d' H (4.17) est obtenu lorsque ses dérivées en $A_{j_{a_l}}$, avec $1 \leq l \leq n_A$, s'annulent telles que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{A}_j)}{\partial A_{j_{a_l}}} &= \left(\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{w}_{a_k} - \mathbf{A}_s, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k} - \mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall a_l \in A. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Donc, le problème à résoudre est, avec l'équation (4.18), tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \left[(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] &= \\ (\mathbf{A}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De plus, il faut ajouter une condition à la limite à cette équation (4.19), déduite de la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.15h) du modèle magnétique transitoire, décrit dans la section 1.3, telle que :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Donc, la pré-résolution sous forme matricielle en \mathbf{A}_j par la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (2.16) est, d'après l'équation (4.19) et la condition à la limite (4.20), telle que :

$$(R_{RR} + R_{AA}) \mathbf{A}_{j_a} = \mathbf{M}_{AA_s} + \mathbf{M}_{RH_{s\mu_0}}, \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (4.21b)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR} &= \left[(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - R_{AA} &= \left[(\mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{A}_{j_a} &= [A_{j_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{AA_s} &= \left[(\mathbf{A}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{RH_{s\mu_0}} &= \left[(\mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

Dans le chapitre 5, il sera montré que la pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.21), à partir de la projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, converge mal avec le pré-conditionneur utilisé. C'est pourquoi le prochain paragraphe détaille la pré-résolution en \mathbf{A}_j avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, au lieu de sa norme (2.8).

4.2. CALCUL DES TERMES SOURCES

4.2.2.1.3 \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

La pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.5) sur le domaine Ω , décrite dans le paragraphe 4.2.1.1.4 et calculée par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (4.4), consiste à minimiser une fonctionnelle, notée I , telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &= \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} I(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} |\mathbf{X} - \mathbf{A}_s|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2, \\ &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} (\mathbf{rot} \mathbf{X} - \mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{X} - \mu_0 \mathbf{H}_s)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

En injectant la décomposition d' \mathbf{A}_j (4.16) sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , la fonctionnelle I (4.22) en \mathbf{A}_j devient :

$$I(\mathbf{A}_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k} - \mu_0 \mathbf{H}_s, \sum_{l=1}^{n_A} A_{j_{a_l}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} - \mu_0 \mathbf{H}_s \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.23)$$

La pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.22) consiste à trouver le minimum de la fonctionnelle I dans le domaine Ω . Or, le minimum d' I (4.23) est obtenu lorsque ses dérivées en $A_{j_{a_l}}, 1 \leq l \leq n_A$, s'annulent telles que :

$$\frac{\partial I(\mathbf{A}_j)}{\partial A_{j_{a_l}}} = \left(\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k} - \mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall a_l \in A. \quad (4.24)$$

Donc, le problème à résoudre est, avec l'équation (4.24), tel que :

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} (\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (4.25)$$

De plus, il faut ajouter la condition à la limite sur \mathbf{A}_j (4.20) à cette équation (4.25). Donc, la pré-résolution sous forme matricielle en \mathbf{A}_j par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (4.4) est, d'après l'équation (4.25) et la condition à la limite (4.20), telle que :

$$R_{RR} \mathbf{A}_{j_a} = \mathbf{M}_{R\mathbf{H}_s \mu_0}, \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}. \quad (4.26b)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR} &= \left[(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{A}_{j_a} &= [A_{j_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{R\mathbf{H}_s \mu_0} &= \left[(\mu_0 \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

Les formes matricielles des pré-résolutions pour calculer les termes sources dues à des bobines non maillées ont été détaillées. Trois pré-résolutions ont été décrites sur le maillage, celle en \mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et celles en \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s sur $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ à partir de sa norme ou de sa semi-norme. Ces pré-résolutions sont seulement pour les bobines non maillées. Dans le prochain paragraphe, des pré-résolutions pour calculer les termes sources seront décrites pour des bobines maillées.

4.2.2.2 Pour des bobines maillées

Dans le paragraphe 4.2.1.2, deux calculs de termes sources ont été décrits pour des bobines maillées. Dans ce paragraphe, la modélisation discrète des pré-résolutions pour calculer les termes sources sur le domaine Ω sera décrite pour le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j .

4.2.2.2.1 \mathbf{H}_j , projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

La pré-résolution en \mathbf{H}_j (4.6) sur le domaine Ω , décrite dans le paragraphe 4.2.1.2.1 et calculée par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (4.4), consiste à minimiser une fonctionnelle, notée J , telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_j &= \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} J(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} |\mathbf{X} - \mathbf{H}_s|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}^2, \\ &= \frac{1}{2} \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)} (\mathbf{rot} \mathbf{X} - \mathbf{J}_s, \mathbf{rot} \mathbf{X} - \mathbf{J}_s)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En injectant la décomposition d' \mathbf{H}_j (4.9) sur les éléments d'arête du maillage Ω_h , la fonctionnelle J (4.27) en \mathbf{H}_j devient :

$$J(\mathbf{H}_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k} - \mathbf{J}_s, \sum_{l=1}^{n_A} H_{j_{a_l}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} - \mathbf{J}_s \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.28)$$

La pré-résolution en \mathbf{H}_j (4.27) consiste à trouver le minimum de la fonctionnelle J dans le domaine Ω . Or, le minimum de J (4.28) est obtenu lorsque ses dérivées en $H_{j_{a_l}}, 1 \leq l \leq n_A$, s'annulent telles que :

$$\frac{\partial J(\mathbf{H}_j)}{\partial H_{j_{a_l}}} = \left(\sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k} - \mathbf{J}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall a_l \in A. \quad (4.29)$$

Donc, le problème à résoudre est, avec l'équation (4.29), tel que :

$$\sum_{k=1}^{n_A} H_{j_{a_k}} (\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (4.30)$$

De plus, il faut ajouter la condition à la limite sur \mathbf{H}_j (4.13) à cette équation (4.30). Donc, la pré-résolution sous forme matricielle en \mathbf{H}_j par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (4.4) est, d'après l'équation (4.30) et la condition à la limite (4.13), telle que :

$$R_{RR} \mathbf{H}_{j_a} = \mathbf{M}_{R\mathbf{J}_s}, \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{H}_{j_a}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (4.31b)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR} &= \left[(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{H}_{j_a} &= [H_{j_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{R\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

La forme matricielle de la pré-résolution en \mathbf{H}_j par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ a été donnée. Dans la formulation en $\mathbf{A}_r - V$, il est aussi nécessaire de calculer \mathbf{A}_s , en plus de \mathbf{J}_s . Alors dans le prochain paragraphe, la modélisation discrète de la pré-résolution en \mathbf{A}_j avec la projection de \mathbf{J}_s sera décrite.

4.2. CALCUL DES TERMES SOURCES

4.2.2.2.2 \mathbf{A}_j , projection de \mathbf{J}_s

La pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.7) sur le domaine Ω , est décrite dans le paragraphe 4.2.1.2.2 et calculée par la projection de \mathbf{J}_s d'après l'équation (3.23).

En appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, au potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j et à une fonction test \mathbf{A}' à définir, la pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.7) devient :

$$(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.32)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.20), le terme $\langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_b)}$, car $\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_h$. Alors la fonction test \mathbf{A}' est définie telle qu'elle appartienne à l'espace $\mathbf{E}_{b0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_b^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}\}$ pour que $\mathbf{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_b)} = 0$.

Alors d'après l'équation (4.32) et la condition à la limite (4.20), la pré-résolution en \mathbf{A}_j sous forme faible est telle que :

Trouver $\mathbf{A}_j \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que

$$(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{b0}^1(\Omega) \quad (4.33)$$

Les variables \mathbf{A}_j et \mathbf{A}' de la pré-résolution (4.33) sont définies au niveau discret à l'aide de la méthode des éléments finis : $\mathbf{A}_j \in \mathbf{W}_b^1(\Omega)$ et $\mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{b0}^1(\Omega)$. En injectant la décomposition d' \mathbf{A}_j (4.16) sur les éléments finis d'arête du maillage Ω_h , la pré-résolution en \mathbf{A}_j (4.33) devient :

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{b0}^1(\Omega). \quad (4.34)$$

La méthode de Galerkin consiste à définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{a_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$ (car l'équation (4.34) est valable pour tout \mathbf{A}' dans $\mathbf{W}_{b0}^1(\Omega)$ donc pour la valeur particulière $\mathbf{w}_{a_l} \in \mathbf{W}_{b0}^1(\Omega)$). Alors, l'équation (4.34) devient :

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_{j_{a_k}} (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (4.35)$$

Donc, la pré-résolution sous forme matricielle en \mathbf{A}_j par la projection de \mathbf{J}_s est, d'après l'équation (4.35) et la condition à la limite (4.20), telle que :

$$R_{RR\nu_0} \mathbf{A}_{j_a} = \mathbf{M}_{A\mathbf{J}_s} \quad (4.36)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR\nu_0} &= \left[(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{A}_{j_a} &= [A_{j_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{A\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

Or cette pré-résolution n'est pas compatible, d'après la définition du paragraphe 3.3.2.3, puisque le terme de droite est en \mathbf{J}_s projeté sur les éléments d'arête et n'est pas en rotationnel d'un champ source projeté sur le rotationnel des éléments d'arête. Donc, il sera difficile d'utiliser cette pré-résolution avec des bobines maillées, puisqu'il sera nécessaire de mettre un arbre d'arête pour la résoudre.

Dans cette section, les pré-résolutions des différents calculs des termes sources ont été détaillées. Ces pré-résolutions sont à calculer avant de résoudre les formulations en $\mathbf{A} - V$ ou en $\mathbf{A}_r - V$ (3.16)–(3.17). Dans la prochaine section, les différents termes sources, décrits dans cette section 4.2, de ces formulations (3.16)–(3.17) seront étudiés.

4.3 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires avec les termes sources

Le but de cette section est de définir les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$, décrites pour des problèmes magnétiques transitoires dans le chapitre 3, suivant les différentes façons de calculer les termes sources, détaillés dans la section précédente 4.2.

4.3.1 Formulations pour des problèmes magnétiques transitoires

D'après la sous-section 4.2.1, les termes sources des bobines non maillées peuvent être calculées soit par \mathbf{H}_s le champ magnétique source, soit par \mathbf{H}_j le champ magnétique source projeté à partir d' \mathbf{H}_s , soit par \mathbf{A}_j le potentiel vecteur magnétique source projeté à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s . Dans des bobines maillées, les termes sources peuvent être calculés soit par la source \mathbf{H}_j projetée à partir de \mathbf{J}_s , soit par la source \mathbf{A}_j projetée à partir de \mathbf{J}_s .

Finalement, que ce soit dans des bobines non maillées ou dans des bobines maillées, les termes sources peuvent être calculés par :

- \mathbf{H}_s le champ magnétique source,
- \mathbf{H}_j le champ magnétique source projeté à partir d' \mathbf{H}_s ou de \mathbf{J}_s ,
- \mathbf{A}_j le potentiel vecteur magnétique source projeté à partir d' \mathbf{A}_s , d' \mathbf{H}_s ou de \mathbf{J}_s .

La formulation en $\mathbf{A} - V$ est décrite dans la sous-section 1.3.1 par l'équation (1.17) et la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ par l'équation (1.18) dans la sous-section 1.3.2. Le terme source pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ (1.17) est la densité de courant source \mathbf{J}_s et les termes sources pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) sont $\mathbf{J}_s - \text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}_s) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}$ et $-\text{div}\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}\right)$. Pour exprimer les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ en fonction des trois calculs de termes sources, \mathbf{H}_s , \mathbf{H}_j et \mathbf{A}_j , la densité de courant source \mathbf{J}_s et le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s seront remplacés par ces termes sources dans les prochains paragraphes.

4.3.1.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

La densité de courant \mathbf{J}_s est le terme source de la formulation en $\mathbf{A} - V$ (1.17). D'après l'équation $\mathbf{J}_s = \text{rot } \mathbf{H}_s$ (3.22), la source \mathbf{J}_s peut être remplacée par le rotationnel d' \mathbf{H}_s .

D'après les équations de la source \mathbf{H}_j projetée à partir d' \mathbf{H}_s ou de \mathbf{J}_s , respectivement (4.1) et (4.6), et l'équation $\mathbf{J}_s = \text{rot } \mathbf{H}_s$ (3.22), la source \mathbf{J}_s peut être remplacée par $\text{rot } \mathbf{H}_j$.

De même par les équations de la source \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{A}_s , d' \mathbf{H}_s ou de \mathbf{J}_s , respectivement (4.3), (4.5) et (4.7), et l'équation $\mathbf{J}_s = \text{rot}(\nu_0 \text{ rot } \mathbf{A}_s)$ (3.23), la source \mathbf{J}_s peut être remplacée par $\text{rot}(\nu_0 \text{ rot } \mathbf{A}_j)$.

Finalement, le terme source \mathbf{J}_s de la formulation en $\mathbf{A} - V$ (1.17) peut être remplacé par :

$$\mathbf{J}_s = \text{rot } \mathbf{H}_s, \quad (4.37)$$

$$= \text{rot } \mathbf{H}_j, \quad (4.38)$$

$$= \text{rot}(\nu_0 \text{ rot } \mathbf{A}_j). \quad (4.39)$$

Tous ces termes sources rendent la formulation en $\mathbf{A} - V$ compatible (voir paragraphe 3.3.2.3), puisque la source \mathbf{J}_s est exprimée en fonction du rotationnel d'une autre source, \mathbf{H}_s , \mathbf{H}_j ou \mathbf{A}_j .

4.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES AVEC LES TERMES SOURCES

Dans le prochain paragraphe, les termes sources de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) seront remplacés par les termes sources \mathbf{H}_s , \mathbf{H}_j et \mathbf{A}_j .

4.3.1.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

La densité de courant source \mathbf{J}_s et le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s sont les termes sources de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18). D'après l'équation (4.37), la source \mathbf{J}_s peut être remplacée par le rotationnel d' \mathbf{H}_s . D'après l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{A}_s = \mu_0 \mathbf{H}_s$ (3.21), le rotationnel d' \mathbf{A}_s peut être remplacé par $\mu_0 \mathbf{H}_s$. La source \mathbf{A}_s reste inchangée.

De plus, la source \mathbf{A}_s ne peut pas être remplacée par \mathbf{H}_j . Donc, la source projetée \mathbf{H}_j ne peut pas être utilisée avec la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18).

D'après l'équation (4.39), la source \mathbf{J}_s peut être remplacée par $\mathbf{rot} (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j)$ et \mathbf{A}_s par \mathbf{A}_j .

Finalement, le terme source $\mathbf{J}_s - \mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}$ de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) peut être remplacé par :

$$\mathbf{J}_s - \mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} = \mathbf{rot} ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \quad (4.40)$$

$$= \mathbf{rot} ((\nu_0 - \nu) \mathbf{rot} \mathbf{A}_j) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}. \quad (4.41)$$

Le terme source $-\text{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right)$ de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) peut être remplacé par :

$$-\text{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right) = -\text{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), \quad (4.42)$$

$$= -\text{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} \right). \quad (4.43)$$

Tous ces termes sources rendent la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ compatible (voir paragraphe 3.3.2.3).

Pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18), l'induction magnétique \mathbf{B} (1.13) et le champ électrique \mathbf{E} dépendent aussi du potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s . Alors, \mathbf{B} et \mathbf{E} peuvent être remplacés tels que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}_r + \mu_0 \mathbf{H}_s, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}_r + \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}. \quad (4.45)$$

Dans cette sous-section, les équations des termes sources des formulations en $\mathbf{A} - V$ (1.17) et en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) ont été étudiées pour les différents calculs de termes sources. Dans la prochaine sous-section, les formulations faibles des termes sources seront décrites.

4.3.2 Formulations faibles

Le but de cette sous-section est de définir la formulation faible des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ (3.5) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6), décrites dans la section 3.1.

4.3.2.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

Dans la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), le terme source est sous la forme $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, avec \mathbf{A}' une fonction test appartenant à $\mathbf{E}_{\mathbf{e}0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e}}^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$.

4.3.2.1.1 \mathbf{H}_s

Lorsque la densité de courant source \mathbf{J}_s est remplacée par le rotationnel du champ magnétique source \mathbf{H}_s (4.37), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{rot} \mathbf{H}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega). \quad (4.46)$$

D'après l'équation (4.46), le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) peut être remplacé par \mathbf{H}_s tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega). \quad (4.47)$$

A l'infini, la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s$ est nulle. Si le domaine Ω comprend l'infini, le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) peut être remplacé tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega). \quad (4.48)$$

4.3.2.1.2 \mathbf{H}_j

Lorsque la source \mathbf{J}_s est remplacée par le rotationnel du champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j (4.38), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{rot} \mathbf{H}_j, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega). \quad (4.49)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.13) décrite dans le paragraphe 4.2.2.1.1, le terme $\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. Dans la section 3.1, la fonction test \mathbf{A}' a été définie telle qu'elle appartienne à l'espace $\mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e}}^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$ alors $\mathbf{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)} = 0$.

D'après l'équation (4.49) et la condition à la limite (4.13), le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) peut être remplacé par \mathbf{H}_j tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega). \quad (4.50)$$

4.3.2.1.3 \mathbf{A}_j

Lorsque la source \mathbf{J}_s est remplacée par $\mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j)$ (4.39), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, tel que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= (\mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega), \\ &= (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.20) décrite dans le paragraphe 4.2.2.1.2, le terme $\langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. Dans la section 3.1, la fonction test \mathbf{A}' a été définie telle qu'elle appartienne à l'espace $\mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e}}^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$ alors $\mathbf{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)} = 0$.

D'après l'équation (4.51) et la condition à la limite (4.20), le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) peut être remplacé par \mathbf{A}_j tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e0}}^1(\Omega). \quad (4.52)$$

4.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES AVEC LES TERMES SOURCES

4.3.2.1.4 Récapitulatif

Finalement, le terme source $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) peut être remplacé par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= (\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &= (\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &= (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Dans le prochain paragraphe, les termes sources de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) seront exprimés sous des formes faibles.

4.3.2.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

Soient \mathbf{A}' une fonction test appartenant à $\mathbf{E}_{e0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_e^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$ et V' une fonction test appartenant à $E_{e0}^0(\Omega) = \{V' \in E_e^0(\Omega), V'|_{\Gamma_e} = 0\}$. Dans la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6), les termes sources sont tels que $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ et $\left(\text{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}\right), V'\right)_{L^2(\Omega)}$.

4.3.2.2.1 \mathbf{H}_s

Lorsque les sources \mathbf{J}_s et $\mathbf{rot} \mathbf{A}_s$ sont respectivement remplacées par $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s$ et $\mu_0 \mathbf{H}_s$ (4.40), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \\ ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{rot} \mathbf{H}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \langle (1 - \mu_0 \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, &\forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.53)$$

D'après l'équation (4.53), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) est :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \\ ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle (1 - \mu_0 \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \\ \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). & \end{aligned} \quad (4.54)$$

A l'infini, la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s$ est nulle. Si le domaine Ω comprend l'infini, le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) peut être remplacé par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \\ ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}'\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, &\forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Le terme source (4.42) de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) devient, en appliquant la formule de Green (A.10a), démontrée dans l'annexe A.2.4.1, tel que :

$$\left(\operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), V' \right)_{L^2(\Omega)} = - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \quad (4.56)$$

À l'infini, la condition à la limite $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_s$ est nulle. Si le domaine Ω comprend l'infini, le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) peut être remplacé tel que :

$$\left(\operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), V' \right)_{L^2(\Omega)} = - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \quad (4.57)$$

La source \mathbf{A}_s ne peut pas être remplacée par la source projetée \mathbf{H}_j . Dans le prochain paragraphe, la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (1.18) sera étudiée avec la source projetée \mathbf{A}_j .

4.3.2.2 \mathbf{A}_j

Lorsque \mathbf{J}_s est remplacée par $\mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j)$ et \mathbf{A}_s par \mathbf{A}_j (4.41), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, tel que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \\ (\mathbf{rot}((\nu_0 - \nu) \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = ((\nu_0 - \nu) \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \langle (\nu_0 - \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.58)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.20) décrite dans le paragraphe 4.2.2.1.2, le terme $\langle (\nu_0 - \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle (\nu_0 - \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. Dans la section 3.1, la fonction test \mathbf{A}' a été définie telle qu'elle appartienne à l'espace $\mathbf{E}_{e0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_e^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$ alors $\mathbf{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle (\nu_0 - \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)} = 0$.

D'après l'équation (4.58) et la condition à la limite (4.20), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) est tel que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \\ ((\nu_0 - \nu) \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Lorsqu' \mathbf{A}_s est remplacée par \mathbf{A}_j , le terme source (4.43) de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) devient, en appliquant la formule de Green (A.10a), démontrée dans l'annexe A.2.4.1, tel que :

$$\left(\operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), V' \right)_{L^2(\Omega)} = - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \quad (4.60)$$

4.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES AVEC LES TERMES SOURCES

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.20) du paragraphe 4.2.2.1.2 et l'implication (A.15) de l'annexe A.2.5.3, le terme $\left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma)}$ devient $\left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. Dans la section 3.1, la fonction test V' a été définie telle qu'elle appartienne à l'espace $E_{e0}^0(\Omega) = \{V' \in E_e^0(\Omega), V'|_{\Gamma_e} = 0\}$ alors $\mathbf{grad} V' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, V' \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)} = 0$.

D'après l'équation (4.58) et la condition à la limite (4.20), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) est tel que :

$$\left(\operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), V' \right)_{L^2(\Omega)} = - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \quad (4.61)$$

4.3.2.2.3 Récapitulatif

Finalement, le terme source $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) peut être remplacé par :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\mathbf{rot}(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &= ((\nu_0 - \nu) \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Le terme source $\left(\operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), V' \right)_{L^2(\Omega)}$ de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) peut être remplacé tel que :

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} \right), V' \right)_{L^2(\Omega)} &= - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &= - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \end{aligned}$$

Dans cette sous-section, les termes sources des formulations faibles en $\mathbf{A} - V$ (3.5) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6) ont été étudiés. Dans la prochaine sous-section, ces termes sources seront exprimés sous des formes matricielles.

4.3.3 Modélisation discrète avec les éléments finis

Le but de cette sous-section est de définir la formulation matricielle des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17), décrites dans la section 3.2.

4.3.3.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

Dans la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16), le terme source est sous la forme $\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} = \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}$, avec $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$ la fonction de forme de l'arête a_l .

4.3.3.1.1 \mathbf{H}_s

Dans la section 3.2, la méthode de Galerkin a permis de définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$. Lorsque \mathbf{J}_s est remplacé par $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s$ (4.47), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) devient, en remplaçant \mathbf{A}' par $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}, \forall a_l \in A. \quad (4.62)$$

En mettant l'équation (4.62) sous forme matricielle, le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) peut être remplacé par \mathbf{H}_s tel que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_s} + \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{n}\times\mathbf{H}_s}, \quad (4.63)$$

avec

$$\begin{aligned} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_s} &= \left[(\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{n}\times\mathbf{H}_s} &= \left[\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

Si le domaine Ω comprend l'infini, le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (4.48) ne comprend pas d'intégration surfacique. Alors, le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) peut être remplacé tel que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_s}. \quad (4.64)$$

4.3.3.1.2 \mathbf{H}_j

Dans la section 3.2, la méthode de Galerkin a permis de définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$. Lorsque \mathbf{J}_s est remplacé par $\mathbf{rot} \mathbf{H}_j$ (4.50), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), devient, en remplaçant \mathbf{A}' par $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (4.65)$$

En mettant l'équation (4.65) sous forme matricielle, le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) peut être remplacé par \mathbf{H}_j tel que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_j}, \quad (4.66)$$

avec

$$\begin{aligned} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_j} &= \left[(\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

4.3.3.1.3 \mathbf{A}_j

Dans la section 3.2, la méthode de Galerkin a permis de définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$. Lorsque \mathbf{J}_s est remplacé par $\mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j)$ (4.52), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5), devient, en remplaçant \mathbf{A}' par $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (4.67)$$

En mettant l'équation (4.67) sous forme matricielle, le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) peut être remplacé par \mathbf{A}_j tel que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{rot}\mathbf{A}_j\nu_0}, \quad (4.68)$$

avec

4.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES AVEC LES TERMES SOURCES

$$\begin{aligned}
- \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{RrotA}_{j\nu_0}} &= \left[(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}.
\end{aligned}$$

4.3.3.1.4 Récapitulatif

Finalement, le terme source $\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} = \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}$ de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) peut être remplacé tel que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A} = \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_s} = \left[(\mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
&= \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_j} = \left[(\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
&= \mathbf{M}_{\mathbf{RrotA}_{j\nu_0}} = \left[(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}.
\end{aligned}$$

Dans le prochain paragraphe, les termes sources de la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) seront exprimés sous des formes matricielles.

4.3.3.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

Dans la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17), les sources sont telles que $\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{RrotA}_{s\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{AA}_{s\sigma}}$ et $-\mathbf{M}_{\mathbf{GA}_{s\sigma}}$, avec \mathbf{w}_{a_l} la fonction de forme de l'arête a_l , où

$$\begin{aligned}
- \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{RrotA}_{s\nu}} &= \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{AA}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{GA}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}.
\end{aligned}$$

4.3.3.2.1 \mathbf{H}_s

Dans la section 3.2, la méthode de Galerkin a permis de définir les fonctions tests \mathbf{A}' et V' telles que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{a_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$, et $V' = w_{n_j}$, avec $1 \leq j \leq n_N$. Lorsque \mathbf{J}_s est remplacé par $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s$ et $\mathbf{rot} \mathbf{A}_s$ par $\mu_0 \mathbf{H}_s$ (4.54)-(4.56), les termes sources de la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6), deviennent, en remplaçant \mathbf{A}' par \mathbf{w}_{a_l} et V' par w_{n_j} , tels que :

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \\
&((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle (1 - \mu_0 \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{a_l} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A, \\
&\hspace{25em} (4.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \left\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, w_{n_j} \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}, \forall n_j \in N. \quad (4.70)
\end{aligned}$$

En régime transitoire, les dérivées de la formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) sont approximées par la méthode d'Euler, décrite dans l'annexe B. A l'itération $j+1$ de la méthode d'Euler, le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s et sa dérivée $\frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}$ sont approchés, avec les équations (B.5) et (B.6) de la méthode d'Euler :

$$\mathbf{A}_s = \theta \mathbf{A}_{s(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{A}_{s(j)}, \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} = \frac{\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}}{\Delta t_{(j)}}. \quad (4.72)$$

Les termes sources en \mathbf{H}_s et en \mathbf{A}_s (4.69)-(4.70) dans la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ (3.6), deviennent, avec les équations (4.71) et (4.72) de la méthode d'Euler, tels que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}_s, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \\ ((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle (1 - \mu_0 \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{a_l} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ - \left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \operatorname{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = - \left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \operatorname{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + \left\langle \frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), w_{n_j} \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}, \forall n_j \in N. \end{aligned} \quad (4.74)$$

En mettant les équations (4.73)-(4.74) sous forme matricielle, les termes sources de la formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) peuvent être remplacés par \mathbf{H}_s tels que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\operatorname{rot}\mathbf{A}_{s\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s\sigma}} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_s\mathbf{1}-\mu_0\nu} + \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{n}\times\mathbf{H}_s\mathbf{1}-\mu_0\nu} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma}, \quad (4.75a)$$

$$- \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s\sigma}} = - \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma} - \mathbf{M}_{\mathbf{N}\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma}, \quad (4.75b)$$

avec

$$\begin{aligned} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\operatorname{rot}\mathbf{A}_{s\nu}} &= \left[(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}_s, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_s\mathbf{1}-\mu_0\nu} &= \left[((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{n}\times\mathbf{H}_s} &= \left[\langle (1 - \mu_0 \nu) \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s, \mathbf{w}_{a_l} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \mathbf{w}_{a_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \operatorname{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s(j+1)}\sigma} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \operatorname{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \end{aligned}$$

4.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES AVEC LES TERMES SOURCES

$$- \mathbf{M}_{\mathbf{Nn} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} \sigma} = \left[\left\langle \frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j)}), w_{n_j} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}.$$

Si le domaine Ω comprend l'infini, les termes sources de la formulation faible en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ (4.55)-(4.57) ne comprennent pas d'intégration surfacique. Alors, les termes sources de la formulation matricielle en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ (3.17) peuvent être remplacés par :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{RrotA}_{s\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{AA}_{s\sigma}} = \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_s \mathbf{1} - \mu_0 \nu} - \mathbf{M}_{\mathbf{AA}_{\mathbf{s}(j+1)} \sigma}, \quad (4.76a)$$

$$-\mathbf{M}_{\mathbf{GA}_{s\sigma}} = -\mathbf{M}_{\mathbf{GA}_{\mathbf{s}(j+1)} \sigma}. \quad (4.76b)$$

La source \mathbf{A}_s ne peut pas être remplacée par la source projetée \mathbf{H}_j . Dans le prochain paragraphe, la formulation en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ (3.17) sera étudiée avec la source projetée \mathbf{A}_j .

4.3.3.2.2 \mathbf{A}_j

Dans la section 3.2, la méthode de Galerkin a permis de définir les fonctions tests \mathbf{A}' et V' telles que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{a_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$, et $V' = w_{n_j}$, avec $1 \leq j \leq n_N$. Lorsque \mathbf{J}_s est remplacé par $\mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j)$ et \mathbf{A}_s par \mathbf{A}_j (4.59)-(4.61), les termes sources de la formulation faible en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ (3.6), deviennent, en remplaçant \mathbf{A}' par \mathbf{w}_{a_l} et V' par w_{n_j} , tels que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega)} - (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{L^2(\Omega)} =$$

$$((\nu_0 - \nu) \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall a_l \in A, \quad (4.77a)$$

$$- \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{L^2(\Omega)} = - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall n_j \in N. \quad (4.77b)$$

En régime transitoire, les dérivées de la formulation matricielle en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ (3.17) sont approximées par la méthode d'Euler, décrite dans l'annexe B. A l'itération $j+1$ de la méthode d'Euler, le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j et sa dérivée $\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t}$ sont approchés, avec les équations (B.5) et (B.6) de la méthode d'Euler, tels que :

$$\mathbf{A}_j = \theta \mathbf{A}_{j(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{A}_{j(j)}, \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} = \frac{\mathbf{A}_{j(j+1)} - \mathbf{A}_{j(j)}}{\Delta t_{(j)}}. \quad (4.79)$$

Les termes sources en \mathbf{A}_j (4.77a)-(4.77b) dans la formulation faible en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ (3.6), deviennent, avec les équations (4.78) et (4.79) de la méthode d'Euler :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega)} - (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega)} - \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a_l} \right)_{L^2(\Omega)} =$$

$$\left((\nu_0 - \nu) \left(\theta \mathbf{rot} \mathbf{A}_{j(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{rot} \mathbf{A}_{j(j)} \right), \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l} \right)_{L^2(\Omega)}$$

$$- \left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{j(j+1)} - \mathbf{A}_{j(j)}), \mathbf{w}_{a_l} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall a_l \in A \quad (4.80a)$$

$$- \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{L^2(\Omega)} = - \left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{j(j+1)} - \mathbf{A}_{j(j)}), \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall n_j \in N \quad (4.80b)$$

En mettant les équations (4.80a)-(4.80b) sous forme matricielle, les termes sources de la formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) peuvent être remplacés par \mathbf{A}_j par :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{s\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s\sigma}} = \mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{j(j+1)\nu_0-\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{j(j+1)\sigma}}, \quad (4.81a)$$

$$-\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s\sigma}} = -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{j(j+1)\sigma}}, \quad (4.81b)$$

avec

$$\begin{aligned} -\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{s\nu}} &= \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{j(j+1)\nu_0-\nu}} &= \left[\left((\nu_0 - \nu) (\theta \mathbf{rot} \mathbf{A}_{j(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{rot} \mathbf{A}_{j(j)}) , \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{j(j+1)\sigma}} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{j(j+1)} - \mathbf{A}_{j(j)}), \mathbf{w}_{a1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{j(j+1)\sigma}} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{j(j+1)} - \mathbf{A}_{j(j)}), \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}. \end{aligned}$$

4.3.3.2.3 Récapitulatif

Finalement, les termes sources, $\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{s\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)\sigma}}$ et $-\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s(j+1)\sigma}}$, de la formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) peuvent être remplacés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{s\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_s 1 - \mu_0 \nu} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)\sigma}}, \\ &= \mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{j(j+1)\nu_0-\nu}} - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{j(j+1)\sigma}}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s(j+1)\sigma}}, \\ &= -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{j(j+1)\sigma}}. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} -\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{Rrot}\mathbf{A}_{s\nu}} &= \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{w}_{a1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{G}\mathbf{A}_{s\sigma}} &= \left[\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t}, \mathbf{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{RH}_s 1 - \mu_0 \nu} &= \left[((1 - \mu_0 \nu) \mathbf{H}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a1})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ -\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{A}_{s(j+1)\sigma}} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{s(j+1)} - \mathbf{A}_{s(j)}), \mathbf{w}_{a1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \end{aligned}$$

4.3. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTIQUES TRANSITOIRES AVEC LES TERMES SOURCES

$$\begin{aligned}
- \mathbf{M}_{\mathbf{GA}_{\mathbf{s}(j+1)}\sigma} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{\mathbf{s}(j+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{s}(j)}) , \mathbf{grad} \ w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N} , \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{RrotA}_{\mathbf{j}(j+1)}\nu_0-\nu} &= \left[\left((\nu_0 - \nu) \left(\theta \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_{\mathbf{j}(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{rot} \ \mathbf{A}_{\mathbf{j}(j)} \right) , \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A} , \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{AA}_{\mathbf{j}(j+1)}\sigma} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{\mathbf{j}(j+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{j}(j)}) , \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A} , \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{GA}_{\mathbf{j}(j+1)}\sigma} &= \left[\left(\frac{\sigma}{\Delta t_{(j)}} (\mathbf{A}_{\mathbf{j}(j+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{j}(j)}) , \mathbf{grad} \ w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N} .
\end{aligned}$$

Dans cette section, les termes sources des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ ont été étudiés suivant les différents calculs des termes sources de la section 4.2, sous forme d'équations, de formes faibles et de formes matricielles.

Dans ce chapitre, les calculs des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ ont été étudiés. Dans le prochain chapitre, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ seront validées sur des problèmes en régime statique, transitoire et harmonique. Le calcul des termes sources pour ces formulations sera aussi validé dans la section 5.1 afin de déterminer le meilleur calcul des termes sources pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ avec des bobines maillées et des bobines non maillées.

Chapitre 5

Validations et résultats des termes sources

Sommaire

5.1	Encoche en magnétostatique	95
5.1.1	Description du problème	95
5.1.1.1	Géométrie	95
5.1.1.2	Maillage	97
5.1.2	Avec une bobine non maillée	97
5.1.2.1	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}	97
5.1.2.1.1	Formulation en \mathbf{A}	97
5.1.2.1.2	Formulation en \mathbf{A}_r	98
5.1.2.2	Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur	99
5.1.3	Avec une bobine maillée	101
5.1.3.1	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}	101
5.1.3.2	Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur	101
5.1.4	Conclusion	102
5.2	Machine asynchrone en magnétoharmonique	105
5.2.1	Description du problème	105
5.2.1.1	Géométrie	105
5.2.1.2	Maillage	106
5.2.2	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}	107
5.2.3	Couple et pertes par effet Joule	109
5.2.4	Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur	109
5.2.5	Récapitulatif	111
5.3	Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire	112
5.3.1	Description du problème	112
5.3.1.1	Géométrie	113
5.3.1.2	Maillages	114
5.3.2	Couple	115
5.3.3	Flux magnétique	116
5.3.3.1	A travers une section d'un pôle magnétique du rotor	116
5.3.3.2	Des bobines	117
5.3.4	Induction magnétique \mathbf{B} en un point	119
5.3.5	Temps de calcul du solveur	120
5.3.6	Dualité des formulations	121
5.3.6.1	Maillages	121
5.3.6.2	Flux magnétique	123

5.3.6.3	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la densité de courant $\mathbf{J_e}$	124
5.4	Conclusion	125

5.1. ENCOCHE EN MAGNÉTOSTATIQUE

Dans ce chapitre, trois cas tests seront étudiés pour valider les formulations en potentiel vecteur magnétique, étudiées dans le chapitre 3, et les différents termes sources, étudiés dans le chapitre 4.

La première validation est faite sur un cas test simple, une encoche avec une bobine maillée (notée parfois BM) ou une bobine non maillée (notée parfois BNM), étudiée en magnétostatique. Cette encoche permettra de déterminer les meilleurs termes sources avec des bobines maillées et des bobines non maillées pour toutes les formulations en potentiel vecteur magnétique.

La deuxième validation est faite sur un cas test réel, une machine asynchrone avec des bobines non maillées en magnétoharmonique, pour comparer les termes sources de la formulation en potentiel vecteur magnétique sur un cas réel.

La troisième validation est faite sur un cas test en magnétique transitoire, le problème 24 du T.E.A.M. Workshop, une machine avec des bobines maillées ou non. Ce problème permettra de valider la formulation en potentiel vecteur magnétique sur un cas réel avec les termes sources choisis dans les cas tests de l'encoche et de la machine asynchrone, et de la comparer avec la formulation en potentiel scalaire magnétique. Elle permettra aussi de montrer la dualité de ces deux formulations.

5.1 Encoche en magnétostatique

5.1.1 Description du problème

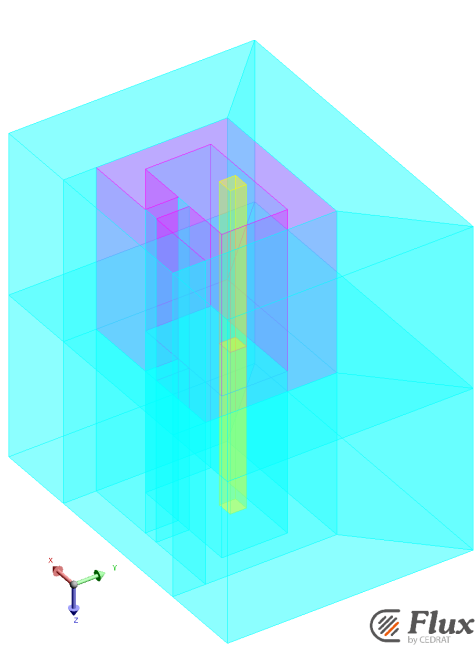
L'encoche décrite dans cette sous-section est celle d'une machine asynchrone en trois dimensions. Elle est étudiée en magnétostatique. Cette encoche possède soit une bobine maillée, soit une bobine non maillée. La différence entre les bobines maillées et non maillées a été expliquée dans la section 4.1.

Sur ce cas de l'encoche, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et les temps de calcul des pré-résolutions et des résolutions seront étudiés pour les différents calculs de termes sources des formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r (D.9), décrites dans l'annexe D.1. Les termes sources du cas de l'encoche seront calculés à l'aide du gradient conjugué ICCG. Les formulations étudiées sont celles avec les termes sources du paragraphe 4.2.2.1 pour les bobines non maillées et avec les termes sources du paragraphe 4.2.2.2 pour les bobines maillées. Pour le terme source en \mathbf{H}_s , la condition à la limite sur le bord du domaine est considérée nulle comme à l'infini. Toutes les formulations sont résolues avec le gradient conjugué ICCG sans arbre d'arêtes. Ce cas test de l'encoche permettra de déterminer les termes sources permettant d'avoir de bons résultats en des temps corrects pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r avec des bobines maillées et des bobines non maillées.

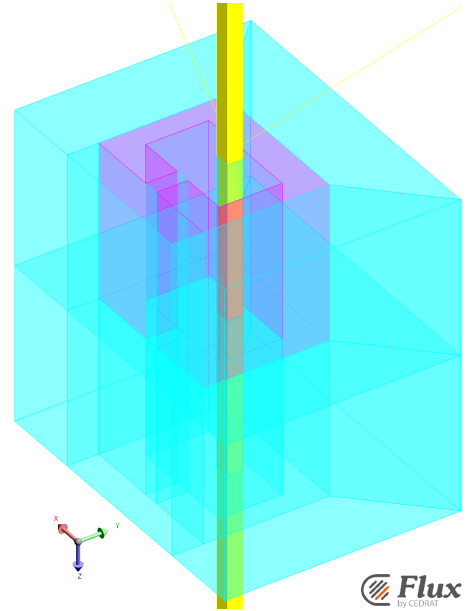
5.1.1.1 Géométrie

La géométrie du cas de l'encoche est décrite sur la figure 5.1a avec une bobine maillée et sur la figure 5.1b avec une bobine non maillée. Cette géométrie possède deux symétries de champ magnétique \mathbf{H} tangent, et courant normal, par rapport au plan xy : une symétrie en $z = 0 \text{ mm}$ et une symétrie en $z = 200 \text{ mm}$. Les deux symétries sont donc de chaque côté de la géométrie afin d'avoir un dispositif infiniment périodique dans la direction z . La bobine non maillée de la figure 5.1b va de $-4\,000 \text{ mm}$ à $4\,000 \text{ mm}$ pour l'axe z , afin de considérer la bobine non maillée infiniment longue pour le domaine éléments finis.

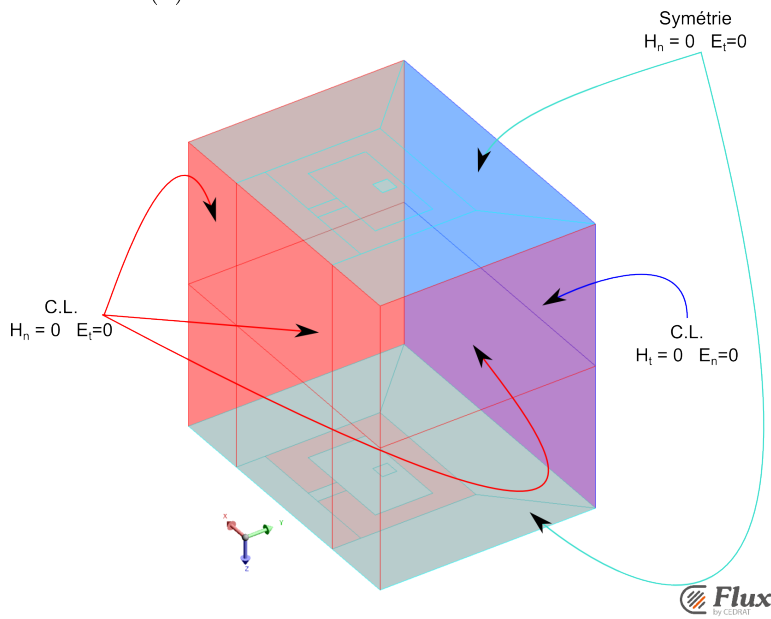
Ce cas de l'encoche est composé d'un circuit magnétique avec au milieu une bobine, maillée ou non, et le tout entouré d'air. Le circuit magnétique est compris seulement entre $z = 0 \text{ mm}$



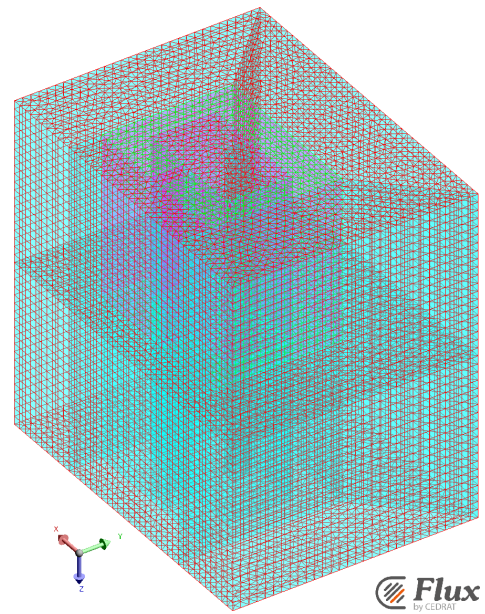
(a) Géométrie avec une bobine maillée



(b) Géométrie avec une bobine non maillée



(c) Symétries et conditions aux limites



(d) Maillage

FIGURE 5.1 – Géométrie et maillage du cas de l'encoche

5.1. ENCOCHE EN MAGNÉTOSTATIQUE

Région	Perméabilité μ	Couleur sur la figure 5.1
Air	μ_0	Turquoise
Circuit Magnétique	$5000 \mu_0$	Rose
Bobine	μ_0	Jaune

TABLEAU 5.1 – Détails des régions du cas de l'encoche

et $z = 100 \text{ mm}$ et il est complété par de l'air entre $z = 100 \text{ mm}$ et $z = 200 \text{ mm}$, afin d'obtenir un dispositif qui ne peut pas être représenté en 2D. Des conditions aux limites sur le champ magnétique \mathbf{H} sont imposées sur le bord de l'encoche et représentées sur la figure 5.1c. Une condition de champ magnétique \mathbf{H} tangentiel, courant normal (en rouge sur la figure 5.1c), est imposée sur les faces dans le plan yz en $x = -50 \text{ mm}$ et $x = 150 \text{ mm}$ et dans le plan xz en $y = 0 \text{ mm}$. Sur la face dans le plan xz en $y = 150 \text{ mm}$, une condition de champ magnétique \mathbf{H} normal, courant tangentiel (en bleu sur la figure 5.1c), est imposée. Dans la bobine de l'encoche, il circule un courant de $1,2 \text{ A}$ par tour. Elle est maillée ou non maillée. Ces différentes régions du cas de l'encoche sont détaillées dans le tableau 5.1.

5.1.1.2 Maillage

Le maillage du cas de l'encoche est du deuxième ordre et comporte 327 098 nœuds et 134 928 éléments. Il est représenté sur la figure 5.1d.

Le maillage du cas de l'encoche est constitué de prismes, puisque le maillage est construit par extrusion selon l'axe z .

Dans ce paragraphe, la géométrie et le maillage du cas de l'encoche ont été détaillés. Dans les prochaines sous-sections, les isovaleurs de \mathbf{B} et les temps de résolution seront étudiées sur ce cas de l'encoche avec une bobine non maillée et une bobine maillée, en fonction des différents calculs des termes sources pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r , détaillées dans le chapitre 4.

5.1.2 Avec une bobine non maillée

5.1.2.1 Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}

5.1.2.1.1 Formulation en \mathbf{A}

Les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} sont représentées sur la figure 5.2 pour l'encoche avec une bobine non maillée pour la formulation en \mathbf{A} avec différents termes sources. La figure 5.2a est calculée avec la source \mathbf{H}_s à partir de la loi de Biot-Savart. La figure 5.2b est calculée avec la source \mathbf{H}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. La figure 5.2c est calculée avec la source \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Enfin, la figure 5.2d est calculée avec la source \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

Les isovaleurs de \mathbf{B} avec la source \mathbf{H}_s de la figure 5.2a sont celles de référence pour comparer avec les autres résultats de la figure 5.2, car dans les autres figures, le but est de projeter \mathbf{H}_s ou \mathbf{A}_s sur le maillage pour stocker les valeurs et éviter de les calculer plusieurs fois. Avec \mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, les isovaleurs de \mathbf{B} sur la figure 5.2b possèdent une tache au-dessus de la bobine dans l'encoche. Donc, la source \mathbf{H}_j donne de mauvais résultats pour les isovaleurs de \mathbf{B} . \mathbf{H}_j ne sera pas utilisée pour calculer les termes sources de la formulation en \mathbf{A} . Avec \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, les isovaleurs de \mathbf{B} sur la

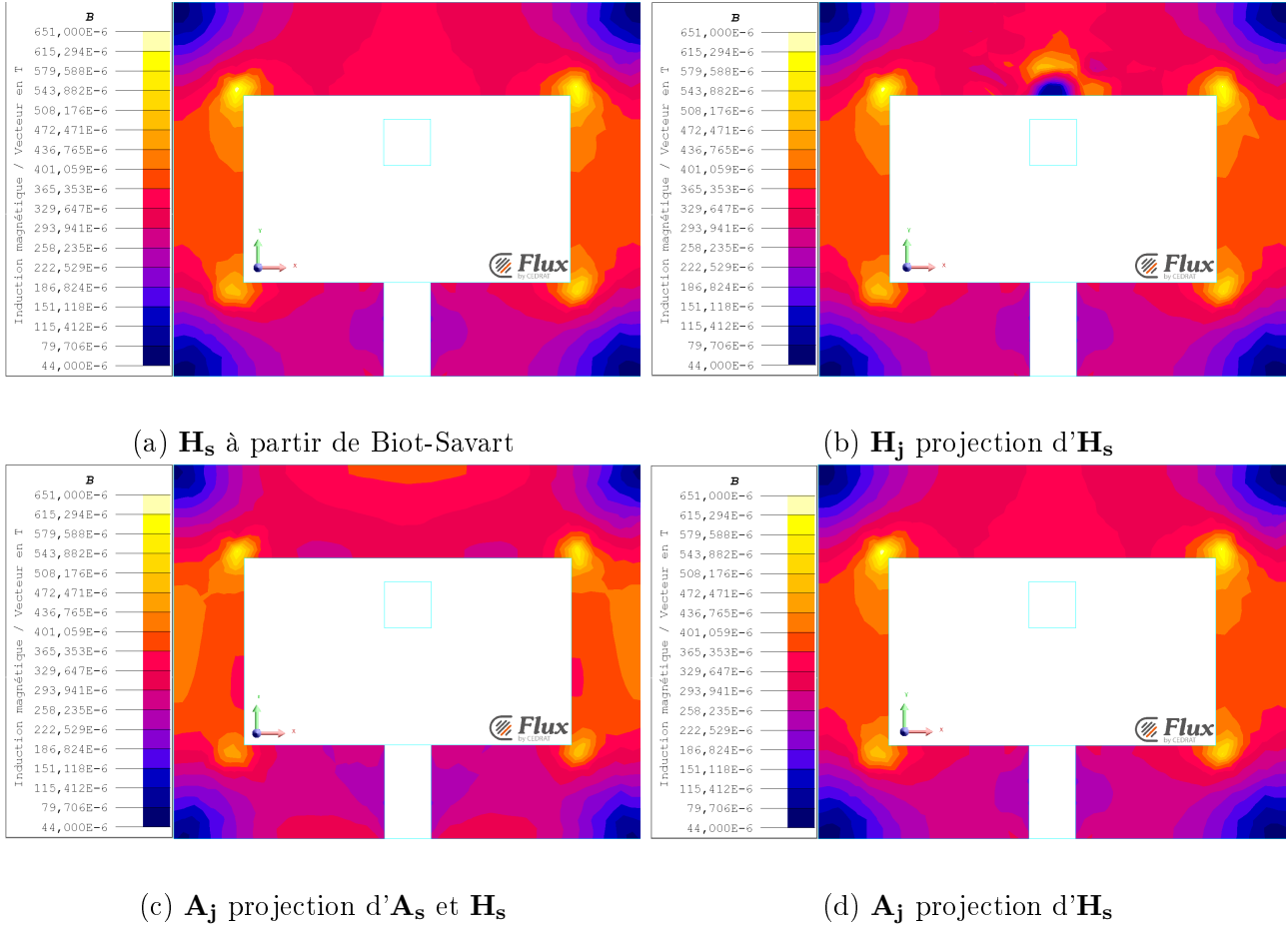


FIGURE 5.2 – Isovaleurs de \mathbf{B} sur le plan xy à $z = 0$ de l'encoche avec une bobine non maillée pour la formulation en \mathbf{A}

figure 5.2c ne possède pas de taches au-dessus de la bobine dans l'encoche et est similaire à la figure 5.2a avec la source \mathbf{H}_s , sans être identiques. Enfin avec \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, les isovaleurs de \mathbf{B} sur la figure 5.2d est identique à la figure 5.2a avec la source \mathbf{H}_s .

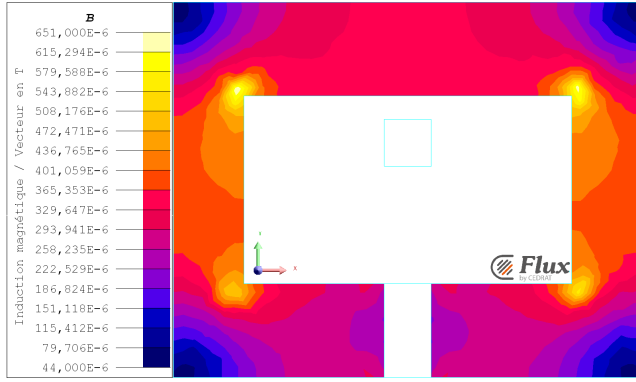
Finalement pour la formulation en \mathbf{A} , le terme source permettant d'obtenir les mêmes isovaleurs de \mathbf{B} qu'avec \mathbf{H}_s est \mathbf{A}_j , calculée par la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ ou par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Dans le prochain paragraphe, ces termes sources seront étudiés avec la formulation en \mathbf{A}_r .

5.1.2.1.2 Formulation en \mathbf{A}_r

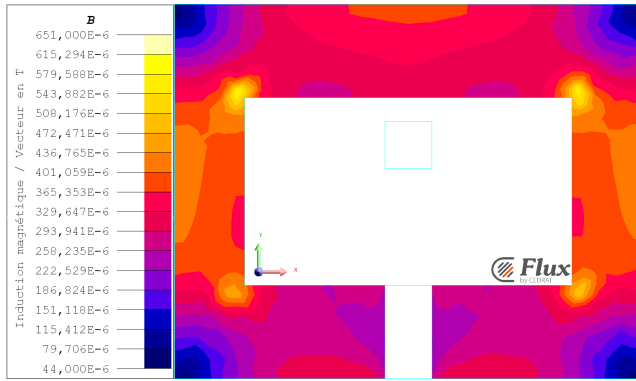
Les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} sont représentées sur la figure 5.3 pour l'encoche avec une bobine non maillée pour la formulation en \mathbf{A}_r avec différents termes sources. La figure 5.3a est calculée avec la source \mathbf{H}_s à partir de la loi de Biot et Savart. La figure 5.3b est calculée avec la source \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Enfin, la figure 5.3c est calculée avec la source \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

Les isovaleurs de \mathbf{B} avec la source \mathbf{H}_s de la figure 5.3a sont celles de référence pour comparer avec les autres résultats de la figure 5.3, car dans les autres figures, le but est de projeter \mathbf{H}_s ou \mathbf{A}_s sur le maillage pour stocker les valeurs et éviter de les calculer plusieurs fois. Avec \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, les isovaleurs de \mathbf{B} sur la figure 5.3b ne

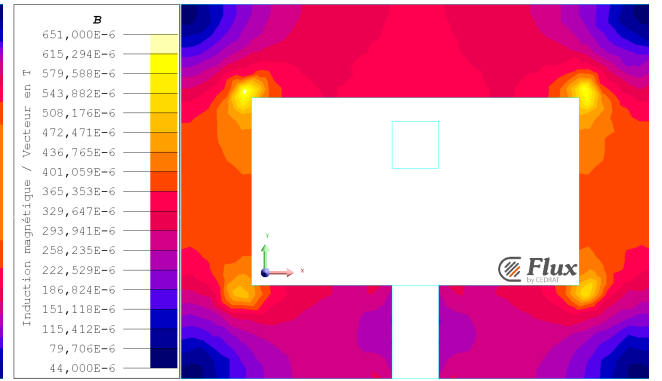
5.1. ENCOCHE EN MAGNÉTOSTATIQUE



(a) \mathbf{H}_s à partir de Biot et Savart



(b) \mathbf{A}_j projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s



(c) \mathbf{A}_j projection d' \mathbf{H}_s

FIGURE 5.3 – Isovaleurs de \mathbf{B} sur le plan xy à $z = 0$ de l'encoche avec une bobine non maillée pour la formulation en \mathbf{A}_r

possède pas de taches au-dessus de la bobine dans l'encoche et est similaire à la figure 5.3a avec la source \mathbf{H}_s , sans être identiques. Et avec \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, les isovaleurs de \mathbf{B} sur la figure 5.3c sont identiques à la figure 5.3a avec \mathbf{H}_s .

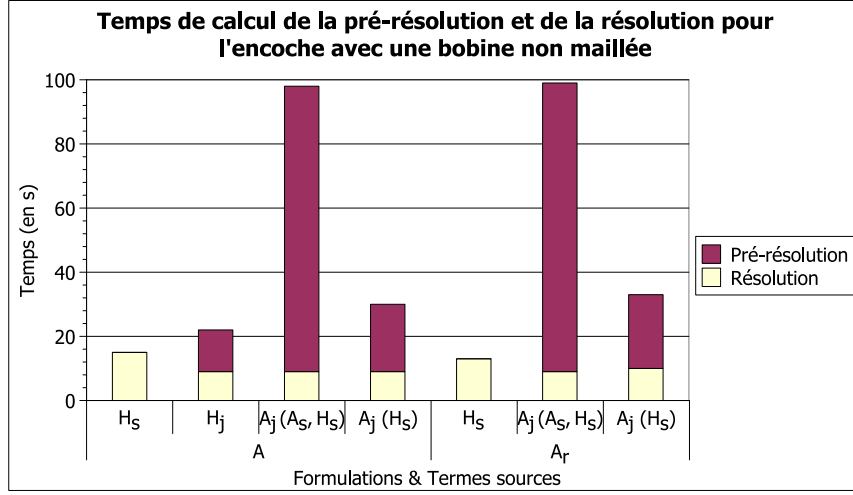
De plus pour chaque terme source, les isovaleurs de la formulation en \mathbf{A} avec \mathbf{A}_j projetée d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s ou projetée d' \mathbf{H}_s des figures 5.2c et 5.2d sont respectivement identiques aux isovaleurs de la formulation en \mathbf{A}_r des figures 5.3b et 5.3c.

Finalement avec des bobines non maillées, il vaut mieux calculer le terme source avec \mathbf{A}_j projeté à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ou projeté à partir d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, que ce soit avec la formulation en \mathbf{A} ou celle en \mathbf{A}_r .

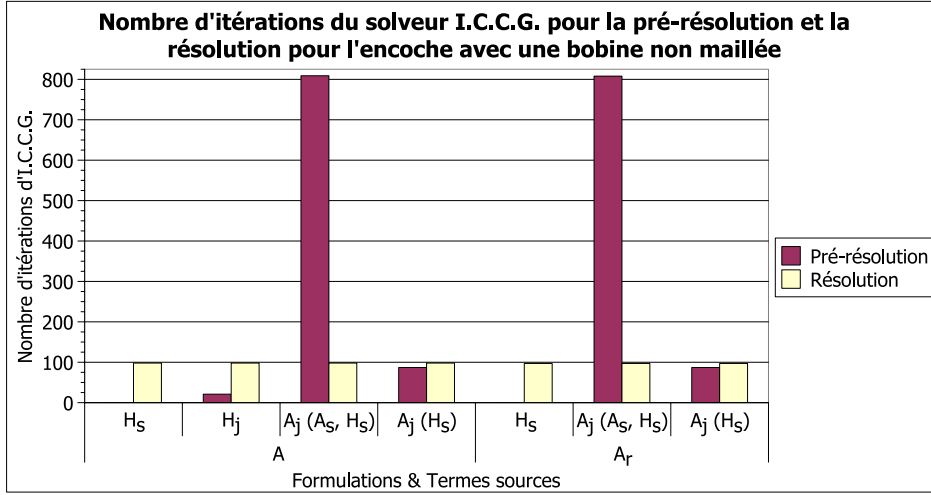
Afin de définir quels termes sources et quelles formulations sont les meilleurs, les temps de calcul et le nombre d'itérations du solveur ICCG pour les pré-résolutions calculant les termes sources et la résolution des formulations seront étudiés.

5.1.2.2 Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur

Le temps de calcul des pré-résolutions pour les termes sources et des résolutions pour les formulations sont représentés sur la figure 5.4a pour l'encoche avec une bobine non maillée. La figure 5.4b représente le nombre d'itérations du solveur ICCG pour les pré-résolutions et les résolutions.



(a) Temps de calcul



(b) Nombre d'itérations d'ICCG

 FIGURE 5.4 – Temps de calcul et nombre d'itérations d'ICCG de la pré-résolution et de la résolution des formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r pour l'encoche avec une bobine non maillée

Pour chaque terme source, les temps de calcul et le nombre d'itérations d'ICCG sont similaires pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r .

La source \mathbf{H}_s est calculée dès qu'on en a besoin, donc elle ne nécessite pas de pré-résolution. C'est pourquoi le temps de calcul d' \mathbf{H}_s sur la figure 5.4a est nul ainsi que le nombre d'itérations d'ICCG sur la figure 5.4b. Sur la figure 5.4a, les temps de calcul des pré-résolutions du plus lent au plus rapide sont pour la source \mathbf{A}_j (en 1 minute et 30 secondes) projetée d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s à partir de la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, puis pour la source \mathbf{A}_j (en 20 secondes) projetée d' \mathbf{H}_s à partir de la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et enfin pour la source \mathbf{H}_j (en 15 secondes) projetée d' \mathbf{H}_s à partir de la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Sur la figure 5.4b, le nombre d'itérations du solveur ICCG du plus grand au plus petit est dans le même ordre que pour les temps de calcul. Cependant la source \mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s à partir de la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donne des mauvais résultats pour les isovaleurs de \mathbf{B} . Donc, le terme source le plus rapide à calculer et donnant des bons résultats, est \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s à partir de la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

Pour la source \mathbf{H}_s , les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r sont résolues en 15 secondes et 100

5.1. ENCOCHE EN MAGNÉTOSTATIQUE

itérations (figure 5.4). Pour tous les autres termes sources, les temps de calcul (figure 5.4a) et le nombre d'itérations du solveur ICCG (figure 5.4b) sont similaires pour les résolutions des formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r : environ 10 secondes et 100 itérations. La résolution en \mathbf{H}_s est un petit peu plus lente, parce qu' \mathbf{H}_s est calculée en même temps que la résolution de la formulation.

Finalement, les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r avec le terme source \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s à partir de la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ sont les plus rapides à résoudre : les temps de calcul et le nombre d'itérations d'ICCG sont petits et elles donnent des bons résultats pour les isovaleurs de \mathbf{B} . De plus, les formulations en \mathbf{A}_r et en \mathbf{A} sont similaires. Alors la formulation en \mathbf{A} est privilégiée par rapport à la formulation en \mathbf{A}_r , plus difficile à implémenter.

Dans la prochaine sous-section, les termes sources d'une bobine maillée seront étudiés pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r à l'aide des isovaleurs de \mathbf{B} et des temps de calcul.

5.1.3 Avec une bobine maillée

5.1.3.1 Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}

Les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} sont représentées sur la figure 5.5 pour l'encoche avec une bobine maillée. Sur la figure 5.5a, \mathbf{B} est calculée à partir de la formulation en \mathbf{A} avec la source \mathbf{H}_j , projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Sur la figure 5.5b, \mathbf{B} est aussi calculée à partir de la formulation en \mathbf{A} mais avec la source \mathbf{A}_j , à partir de \mathbf{J}_s . Sur la figure 5.5c, \mathbf{B} est aussi calculée avec la source \mathbf{A}_j mais à partir de la formulation en \mathbf{A}_r .

Sur la figure 5.5, les isovaleurs de \mathbf{B} sont identiques que ce soit avec la formulation en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r et avec les termes sources \mathbf{H}_j et \mathbf{A}_j .

Finalement avec des bobines maillées, les isovaleurs de \mathbf{B} ne permettent de définir ni le meilleur calcul de source, ni la meilleure formulation. Alors afin de définir quels termes sources sont les meilleurs pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r , les temps de calcul et le nombre d'itérations du solveur ICCG pour les pré-résolutions calculant les termes sources et la résolution des formulations seront étudiés.

5.1.3.2 Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur

Le temps de calcul des pré-résolutions pour les termes sources et des résolutions pour les formulations sont représentés sur la figure 5.6a pour l'encoche avec une bobine maillée. La figure 5.6b représente le nombre d'itérations du solveur ICCG pour les pré-résolutions et les résolutions de l'encoche avec une bobine maillée.

Le calcul de la source \mathbf{A}_j pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r est un peu plus rapide (15 secondes et 90 itérations) que pour la source \mathbf{H}_j pour la formulation en \mathbf{A} (20 secondes et 100 itérations). Les résolutions des formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r sont calculées en un temps et un nombre d'itérations identiques (10 secondes et 100 itérations). Donc avec des bobines maillées, il vaut mieux utiliser la formulation en \mathbf{A} avec la source \mathbf{A}_j , puisqu'elle est la plus rapide et les isovaleurs de \mathbf{B} sont identiques pour toutes les formulations et pour tous les termes sources.

Cependant dans le paragraphe 4.2.2.2.2, il a été expliqué que la pré-résolution en \mathbf{A}_j n'est pas compatible. Donc dans certains cas, mais pas dans celui de l'encoche, il faut un arbre d'arêtes pour la résoudre. Cet arbre va ralentir la pré-résolution. Il est donc préférable d'utiliser la source \mathbf{H}_j avec des bobines maillées.

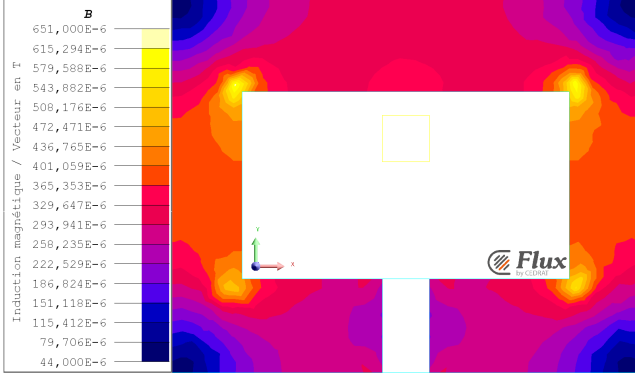
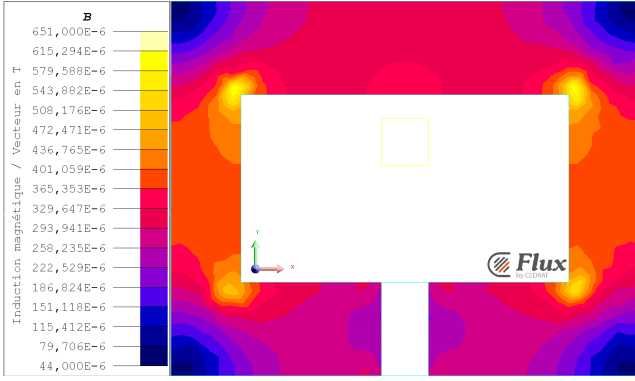
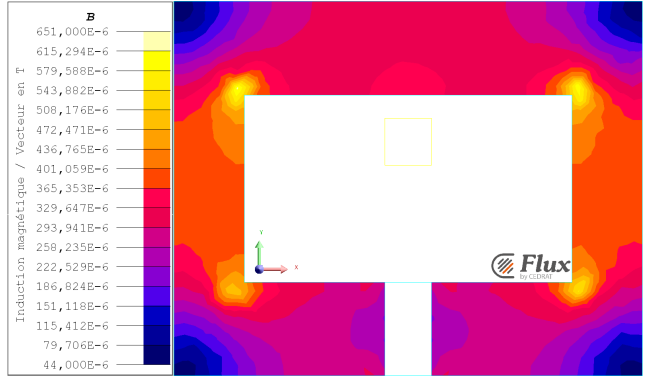

 (a) \mathbf{A} avec \mathbf{H}_j projection d' \mathbf{H}_s

 (b) \mathbf{A} avec \mathbf{A}_j à partir de \mathbf{J}_s

 (c) \mathbf{A}_r avec \mathbf{A}_j à partir de \mathbf{J}_s

 FIGURE 5.5 – Isovaleurs de \mathbf{B} sur le plan xy à $z = 0$ de l'encoche avec une bobine maillée

Finalement avec des bobines maillées, le meilleur calcul de termes sources est \mathbf{H}_j , la projection de \mathbf{J}_s pour la formulation en \mathbf{A} . Dans la prochaine sous-section, un récapitulatif de l'étude réalisée sur l'encoche sera fait.

5.1.4 Conclusion

Le but de l'étude de l'encoche était de déterminer la meilleure formulation en potentiel vecteur magnétique, de celles étudiées dans le chapitre 3, et le meilleur terme source, de ceux étudiés dans le chapitre 4. Les formulations en potentiel vecteur magnétique résolues sont celles en \mathbf{A} (3.16) et en \mathbf{A}_r (3.17). Pour les bobines non-maillées, les termes sources étudiés sont :

- \mathbf{H}_s calculé à partir de Biot et Savart et intégré avec (4.64) dans la formulation en \mathbf{A} et avec (4.75) dans la formulation en \mathbf{A}_r ,
- \mathbf{H}_j la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ résolue par (4.14) et intégré avec (4.66) dans la formulation en \mathbf{A} ,
- \mathbf{A}_j la projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ résolue par (4.21) et intégré avec (4.68) dans la formulation en \mathbf{A} et avec (4.81) dans la formulation en \mathbf{A}_r ,
- \mathbf{A}_j la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ résolue par l'équation (4.26) et intégré avec (4.81) dans la formulation en \mathbf{A} et avec (4.68) dans la formulation en \mathbf{A}_r .

Alors que pour les bobines maillées, les termes sources étudiés sont :

- \mathbf{H}_j la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ résolue par (4.31) et intégré avec (4.66) dans la formulation en \mathbf{A} ,

5.1. ENCOCHE EN MAGNÉTOSTATIQUE

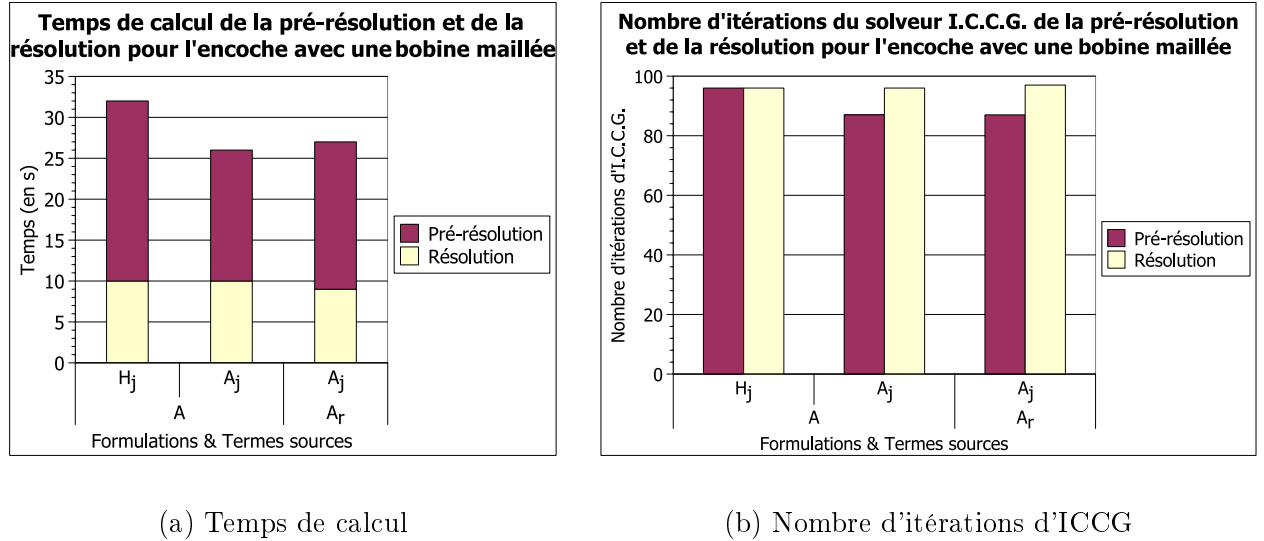


FIGURE 5.6 – Temps de calcul et nombre d'itérations d'ICCG de la pré-résolution et de la résolution des formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r pour l'encoche avec une bobine maillée

- \mathbf{A}_j la projection de \mathbf{J}_s résolue par (4.36) et intégré avec (4.68) dans la formulation en \mathbf{A} et avec (4.81) dans la formulation en \mathbf{A}_r .

Les critères de définition des meilleurs formulation et terme source sont tels que :

1. les valeurs du terme source doivent être calculées une fois, puis stockées sur le maillage pour éviter de les recalculer à chaque pas de temps en magnétique transitoire ;
2. les isovaleurs de \mathbf{B} de l'induction magnétique doivent être justes, i.e. pas de taches anormales au-dessus de la bobine ;
3. les temps de calcul des pré-résolutions des termes sources et des résolutions des formulations doivent être raisonnables.

Pour ces formulations avec les différents termes sources, les critères sont analysés dans le tableau 5.2 pour des bobines maillées et des bobines non maillées.

Bobine	Non maillée							Maillée		
	\mathbf{H}_s		\mathbf{H}_j	$\mathbf{A}_j (\mathbf{A}_s, \mathbf{H}_s)$		$\mathbf{A}_j (\mathbf{H}_s)$		\mathbf{H}_j	\mathbf{A}_j	
Formulations	\mathbf{A}	\mathbf{A}_r	\mathbf{A}	\mathbf{A}	\mathbf{A}_r	\mathbf{A}	\mathbf{A}_r	\mathbf{A}	\mathbf{A}	\mathbf{A}_r
Valeurs stockées	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Isovaleurs de \mathbf{B}	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Temps de calcul	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✗	✗

TABLEAU 5.2 – Récapitulatif des termes sources pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r avec des bobines maillées et non maillées

Le premier critère est vérifié pour tous les termes sources sauf \mathbf{H}_s , qu'il faut calculer à partir de Biot et Savart à chaque fois qu'on en a besoin. Le deuxième critère est vérifié pour tous les termes sources sauf \mathbf{H}_j . Sur la figure 5.2b, des taches anormales de \mathbf{B} apparaissent au-dessus de la bobine, alors que les figures 5.2 et 5.3 de tous les autres termes sources sont identiques. Ces taches sont dues à la pré-résolution en \mathbf{H}_j qui donne des mauvais résultats sur le circuit magnétique. Pour des bobines non maillées, le troisième critère est vérifié pour tous les termes

sources sauf \mathbf{A}_j la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, pour lequel les temps de calcul sont trois fois plus longs que pour les autres termes sources. Pour des bobines maillées, le troisième critère est vérifié pour le terme source \mathbf{H}_j mais pas pour le terme source \mathbf{A}_j , car avec \mathbf{A}_j les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r ne sont plus compatibles (voir le paragraphe 3.3.2.3).

Finalement avec des bobines non maillées, le meilleur calcul de terme source est \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s à partir de la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r donnent les mêmes résultats mais la formulation en \mathbf{A}_r est plus difficile à implémenter. Alors avec des bobines non maillées, il faut résoudre la formulation en \mathbf{A} avec \mathbf{A}_j la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Avec des bobines maillées, le meilleur calcul de termes sources est \mathbf{H}_j , la projection de \mathbf{J}_s , et la meilleure formulation est celle en \mathbf{A} .

Dans la prochaine section, les différents calculs des termes sources pour des bobines non maillées pour la formulation en \mathbf{A} seront étudiés sur un cas généralisant celui de l'encoche, une machine asynchrone.

5.2 Machine asynchrone en magnétoharmonique

L'étude de la machine asynchrone, présentée dans cette section, a été décrite dans l'article [Ferroillat *et al.*, 2015].

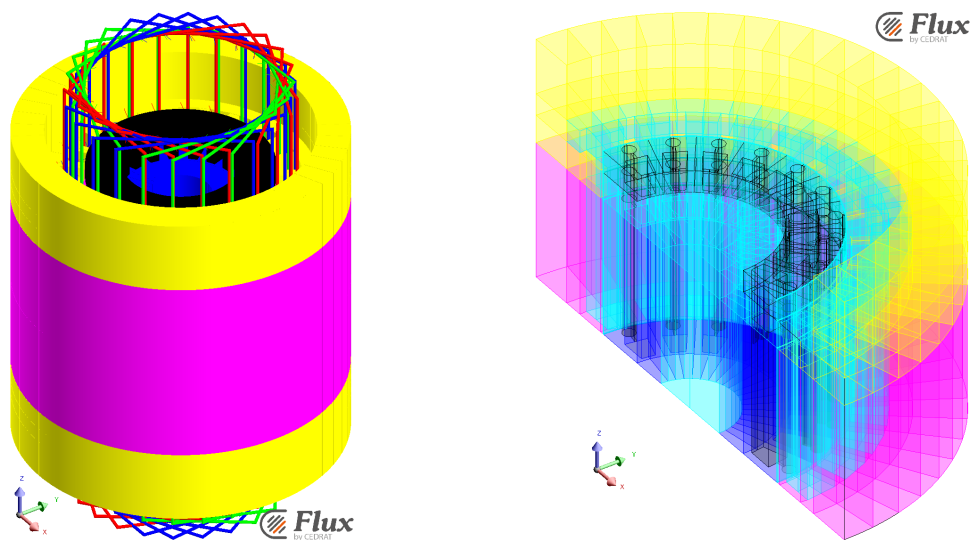
5.2.1 Description du problème

Dans cette sous-section, une machine asynchrone avec des bobines non maillées est étudiée en trois dimensions et en régime harmonique à 50 Hz. Cette machine est une généralisation du problème de l'encoche, étudié dans la section 5.1 en régime statique.

Les termes sources de la machine asynchrone seront calculés à l'aide du gradient conjugué ICCG. La formulation en $\mathbf{A} - V$ (D.22) de l'annexe D.2.2.1 sera résolue pour la machine soit avec le gradient conjugué ICCG et sans arbre d'arêtes, soit avec le solveur direct MUMPS et un arbre d'arêtes, comme expliqué dans la section 3.3. Sur cette machine, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} , le couple, les pertes par effet Joule et les temps de calcul seront étudiés pour les différents calculs de termes sources pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées. Les calculs des termes sources pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ étudiés sont ceux du paragraphe 4.2.2.1. Ce problème permet de vérifier le choix des termes sources pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées sur un cas plus complexe que l'encoche de la section 5.1. Il permet aussi de comparer les solveurs itératifs sans arbre d'arêtes et directs avec un arbre d'arêtes.

5.2.1.1 Géométrie

La géométrie de la machine asynchrone est représentée sur la figure 5.7. La machine asynchrone possède une symétrie de champ magnétique \mathbf{H} tangent (et champ électrique \mathbf{E} normal) par rapport au plan xy en $z = 0$. Elle possède aussi une périodicité paire autour de l'axe z . Donc, seulement un quart de la machine asynchrone peut être étudié comme sur la figure 5.7b, au lieu de la machine complète, représentée sur la figure 5.7a.



(a) Complète avec les bobines non maillées (b) Avec la symétrie et la périodicité

FIGURE 5.7 – Géométrie de la machine asynchrone

Comme toute machine asynchrone, cette machine possède une région magnétique non-conductrice représentant les tôles du stator, nommée abusivement stator, et une région magnétique non-conductrice représentant les tôles du rotor, nommée abusivement rotor. Elle possède aussi une cage d'écuréuil, une région amagnétique conductrice, et un anneau de protection au-dessus du stator, une région faiblement magnétique et conductrice. Trois bobines non maillées sont ajoutées dans les encoches du stator. Ces bobines non maillées ont des phases de 0° , -120° et 120° et ont toutes un courant de crête de 8,92 A. Pour modéliser l'infini, une transformation de l'infini, qui n'est pas représentée sur la figure 5.7, est effectuée sur la machine [Brunotte, 1991]. La machine est entourée d'une boîte infinie d'air, qui n'est pas représentée sur la figure 5.7. Les régions de la machine asynchrone sont décrites dans le tableau 5.3 par leur perméabilité et leur conductivité, ainsi que la couleur de la région sur la figure 5.7.

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Couleur sur la figure 5.7
Air	μ_0	0	Turquoise
Rotor	$5000 \mu_0$	0	Bleu
Stator	$5000 \mu_0$	0	Rose
Cage d'écuréuil	μ_0	$3,21 * 10^7 S.m^{-1}$	Noir
Anneau de protection	$1,04 \mu_0$	$1,45 * 10^6 S.m^{-1}$	Jaune
Bobine 1	μ_0	-	Rouge
Bobine 2	μ_0	-	Vert
Bobine 3	μ_0	-	Bleu

TABLEAU 5.3 – Détails des régions de la machine asynchrone

5.2.1.2 Maillage

Le maillage de la machine asynchrone est représenté sur la figure 5.8. Il est du deuxième ordre et composé de 2 632 447 nœuds et 990 196 éléments.

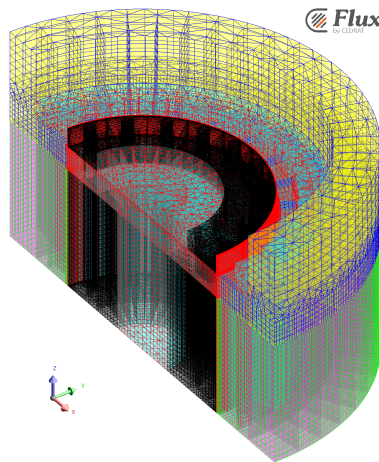


FIGURE 5.8 – Maillage de la machine asynchrone.

Le maillage du stator et du rotor a été extrudé. L'air, la cage d'écuréuil et la partie du rotor autour de la cage d'écuréuil sont maillés avec des éléments prismatiques. Alors que le reste de la

5.2. MACHINE ASYNCHRONE EN MAGNÉTOHARMONIQUE

machine asynchrone, le stator, l'anneau de protection au-dessus du stator et la partie du rotor ne comprenant pas la cage d'écureuil, est maillé avec des éléments hexaédriques.

Dans cette sous-section, la géométrie et le maillage de la machine asynchrone ont été détaillés. Dans la prochaine sous-section, les isovaleurs de \mathbf{B} , le couple et les pertes par effet Joule seront étudiés sur cette machine.

5.2.2 Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}

Sur la figure 5.9, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} sont représentées sur le plan xy à $z = 0$ pour deux encoches du stator de la machine asynchrone, suivant les différents calculs de termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées. Sur les figures 5.9a, 5.9c, 5.9e et 5.9g, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur itératif ICCG. Tandis que sur les figures 5.9b, 5.9d, 5.9f et 5.9h, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur direct MUMPS. Les figures 5.9a et 5.9b sont calculées avec la source \mathbf{H}_s , calculée à partir des formes analytiques de la loi de Biot et Savart (A.17) [Urankar, 1980]-[Urankar, 1982a]-[Urankar, 1982b], respectivement avec ICCG et MUMPS. Les figures 5.9c et 5.9d sont calculées avec la source \mathbf{H}_j , projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, respectivement avec ICCG et MUMPS. Puis les figures 5.9e et 5.9f sont calculées avec la source \mathbf{A}_j , projetée à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, respectivement avec ICCG et MUMPS. Enfin les figures 5.9g et 5.9h sont calculées avec la source \mathbf{A}_j , projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, respectivement avec ICCG et MUMPS.

En comparant les figures de gauche 5.9a, 5.9c, 5.9e et 5.9g pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG avec les figures de droite 5.9b, 5.9d, 5.9f et 5.9h pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS, les isovaleurs de \mathbf{B} sont similaires pour chaque terme source que la formulation en $\mathbf{A} - V$ soit résolue avec ICCG ou MUMPS.

Les isovaleurs de \mathbf{B} des figures 5.9a et 5.9b pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue respectivement avec ICCG et MUMPS avec \mathbf{H}_s sont celles de référence pour comparer avec les autres résultats de la figure 5.9. Dans les autres figures, les sources \mathbf{A}_s ou \mathbf{H}_s calculées analytiquement sont projetées sur le maillage pour stocker les valeurs et éviter de les calculer plusieurs fois.

Sur les figures 5.9c avec ICCG et 5.9d avec MUMPS, il y a des taches anormales pour les isovaleurs de \mathbf{B} au-dessus des encoches du stator de la machine asynchrone, comme dans le paragraphe précédent 5.1.2.1 pour le cas de l'encoche. Les taches sont dues aux bobines non maillées, qui sont trop proches d'une région magnétique. Donc, la projection d' \mathbf{H}_s sur le maillage avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, \mathbf{H}_j , donne de mauvais résultats pour l'induction magnétique \mathbf{B} . Le terme source \mathbf{H}_j ne sera pas utilisé pour calculer les termes sources de la formulations en $\mathbf{A} - V$.

Avec le terme source \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{A}_s et \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ou projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, les isovaleurs de \mathbf{B} , représentées respectivement sur les figures 5.9e, 5.9f, 5.9g et 5.9h, ne possèdent pas de taches au-dessus des encoches du stator et sont similaires aux isovaleurs de \mathbf{B} avec la source \mathbf{H}_s des figures 5.9a et 5.9b.

Finalement, les termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$, permettant d'obtenir les mêmes isovaleurs d'induction magnétique \mathbf{B} qu'avec la source \mathbf{H}_s (figures 5.9a et 5.9b), sont \mathbf{A}_j la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (figures 5.9e et 5.9f) et \mathbf{A}_j la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (figures 5.9g et 5.9h). De plus, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec un solveur itératif ou direct n'influe pas sur les isovaleurs de \mathbf{B} .

Dans la prochaine sous-section, le couple, calculé sur le rotor et la cage d'écureuil, et les pertes par effet Joule, calculé pour la cage d'écureuil et l'anneau de protection au-dessus du stator, seront étudiés.

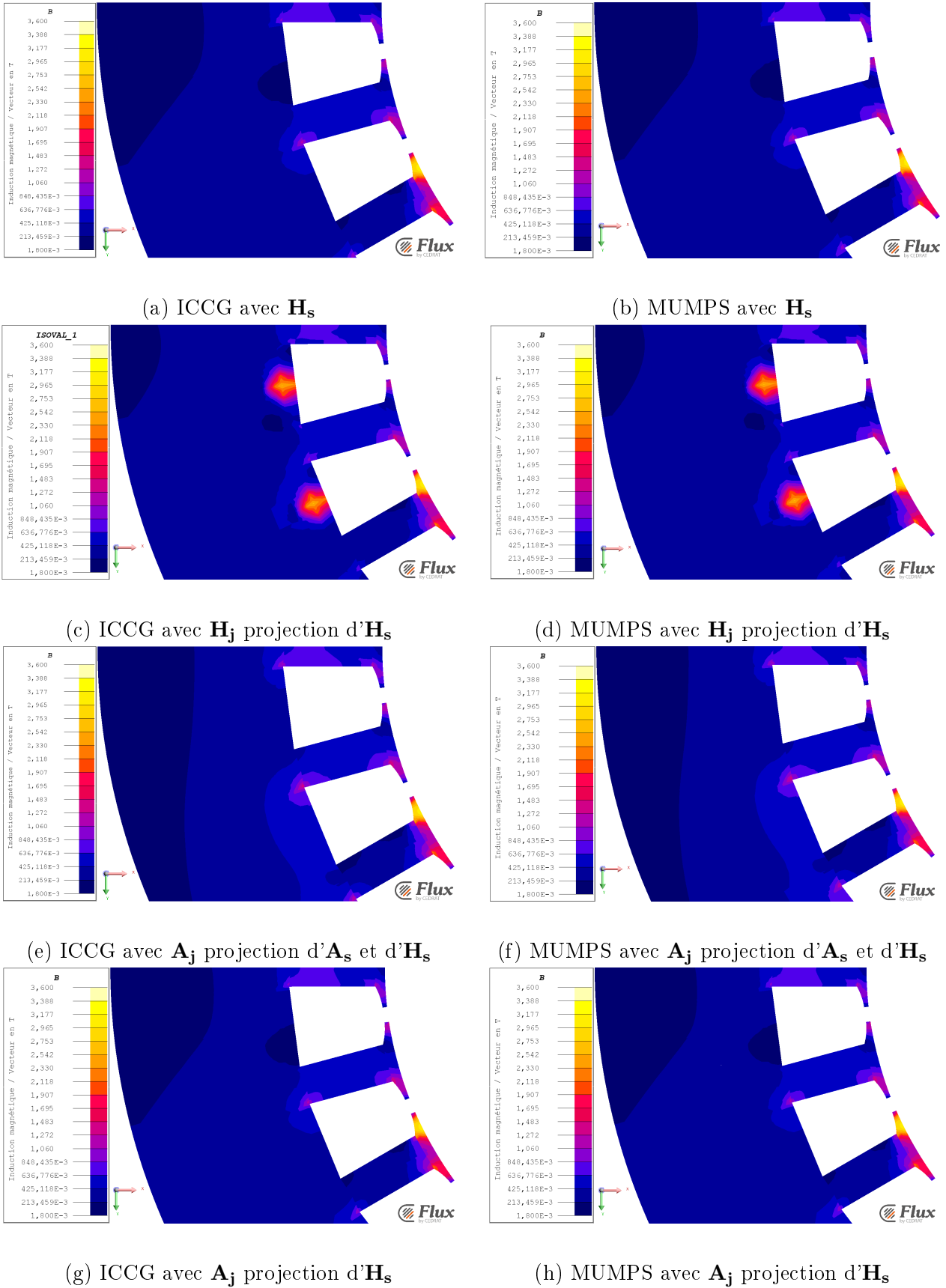


FIGURE 5.9 – Isovaleurs de \mathbf{B} sur le plan xy à $z = 0$ pour 2 encoches de la machine asynchrone pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées

5.2.3 Couple et pertes par effet Joule

Le couple du rotor, les pertes par effet Joule de la cage d'écureuil et les pertes par effet Joule de l'anneau de protection au-dessus du stator sont donnés dans le tableau 5.4 pour les différents calculs de termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG ou MUMPS. Pour le couple et les pertes Joule, les termes sources utilisés sont \mathbf{H}_s à partir de Biot et Savart, \mathbf{H}_j projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

Sources	Solveur	Couple (en $N.m$)	Pertes Joule (en W)	
		Rotor	Cage d'écureuil	Anneau de protection
\mathbf{H}_s	ICCG	2,097	685,7	1,777
	MUMPS	2,097	685,7	1,777
\mathbf{H}_j projection d' \mathbf{H}_s	ICCG	2,095	685,4	1,766
	MUMPS	2,095	685,4	1,766
\mathbf{A}_j projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s	ICCG	2,088	682,8	1,768
	MUMPS	2,088	682,8	1,768
\mathbf{A}_j projection d' \mathbf{H}_s	ICCG	2,097	685,7	1,777
	MUMPS	2,097	685,7	1,777
Maximum des écarts relatifs		0,41 %	0,43 %	0,7 %

TABLEAU 5.4 – Couple du rotor et de la cage d'écureuil et pertes Joule pour la cage d'écureuil et l'anneau de protection pour la machine asynchrone

Pour tous les calculs de termes sources sur les bobines non maillées pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, le couple minimum, calculé sur les régions rotor et cage d'écureuil, est de 2,088 N/m et le couple maximum est de 2,097 N/m . Alors, la différence relative pour le couple est de seulement 0,41 %.

Les pertes par effet Joule, pour tous les calculs de termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$, sont comprises entre 682,8 W et 685,7 W pour la cage d'écureuil et entre 1,766 W et 1,777 W pour l'anneau de protection au-dessus du stator. Donc pour les pertes Joule, la différence relative est de 0,43 % pour la cage d'écureuil et de 0,7 % pour l'anneau de protection, selon les termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$.

Finalement, le couple et les pertes Joule donnent les mêmes résultats quelque soit le moyen de calcul des termes sources et le solveur pour la formulation en $\mathbf{A} - V$.

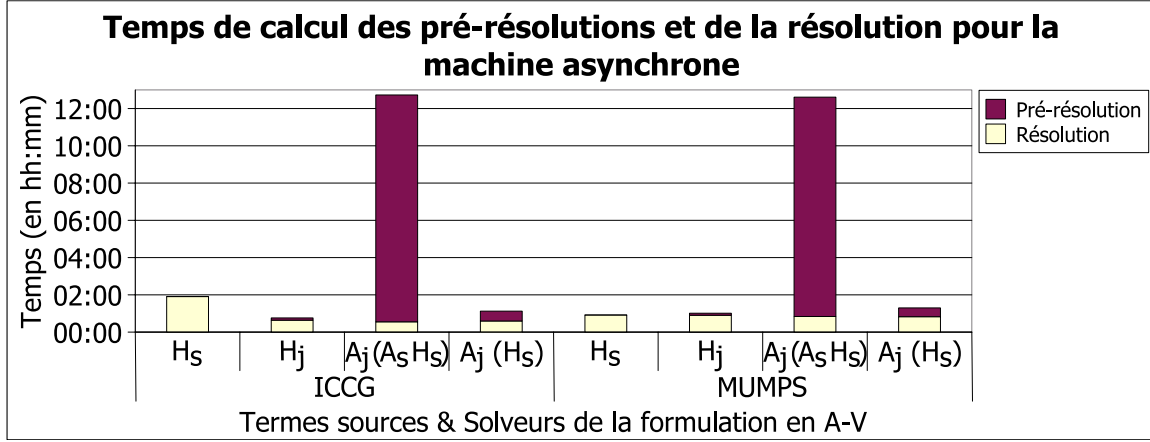
De plus, la source \mathbf{H}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donne des mauvais résultats pour les isovaleurs de \mathbf{B} , mais pas pour le couple et les pertes par effet Joule. Les erreurs faites lors de la projection avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sont seulement locales. C'est pourquoi les grandeurs globales comme le couple et les pertes Joule donne des bons résultats alors que les grandeurs locales comme les isovaleurs de \mathbf{B} donnent de mauvais résultats avec la source \mathbf{H}_j .

Dans la prochaine sous-section, les temps de calcul des solveurs ICCG et MUMPS et le nombre d'itérations du solveur ICCG seront étudiés afin de déterminer quel calcul de termes sources des bobines non maillées est le meilleur pour la formulation en $\mathbf{A} - V$.

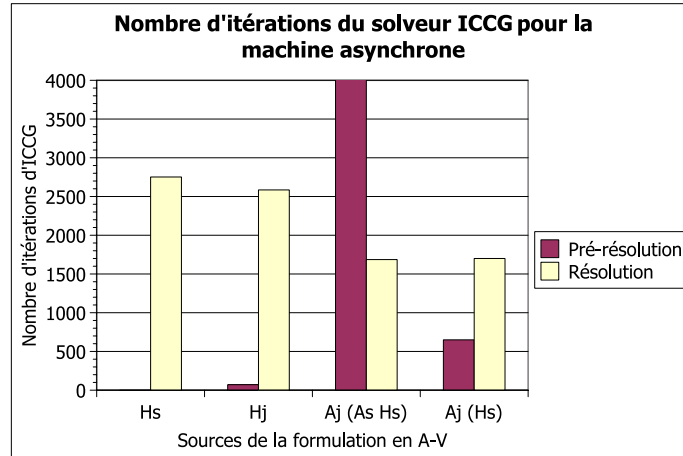
5.2.4 Temps de calcul et nombre d'itérations du solveur

Les temps de calcul des pré-résolutions avec le solveur ICCG en fonction des différents calculs de termes sources et de la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec les solveurs ICCG

et MUMPS sont donnés dans la figure 5.10a pour la machine asynchrone avec des bobines non maillées. La figure 5.10b représente le nombre d'itérations d'ICCG pour les pré-résolutions et la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - \mathbf{V}$. Pour le calcul des termes sources, le nombre d'itérations d'ICCG donné est la moyenne du nombre d'itérations des pré-résolutions pour chaque bobine. Sur la figure 5.10b, le nombre d'itérations du solveur ICCG pour la source \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s a été coupé afin de comparer les itérations pour les autres sources, sa valeur est de 18 654 itérations.



(a) Temps de calcul d'ICCG et de MUMPS



(b) Nombre d'itérations d'ICCG

FIGURE 5.10 – Temps de calcul d'ICCG et de MUMPS et nombre d'itérations d'ICCG des pré-résolutions et de la résolution pour la machine asynchrone

Le calcul des termes sources a toujours été fait avec le solveur ICCG que la formulation en $\mathbf{A} - \mathbf{V}$ soit résolue avec ICCG ou MUMPS. La source \mathbf{H}_s est calculée à partir de la loi de Biot et Savart chaque fois qu'elle est nécessaire, donc \mathbf{H}_s n'a pas besoin de pré-résolution. C'est pourquoi le temps de calcul d' \mathbf{H}_s est nul sur la figure 5.10a ainsi que le nombre d'itérations d'ICCG sur la figure 5.10b. Pour la source \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, les temps de calcul sur la figure 5.10a sont très longs (environ 12 heures) et le nombre d'itérations d'ICCG est très grand (environ 18 000). Donc le gradient conjugué converge mal, parce que le système (4.21) du paragraphe 4.2.2.1.2 pour \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ est mal conditionné. Cependant quand \mathbf{A}_j est projetée à partir d' \mathbf{H}_s

avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ou quand \mathbf{H}_j est projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, les temps de calcul sur la figure 5.10a sont raisonnables (respectivement 30 et 20 minutes), ainsi que le nombre d'itérations du gradient conjugué sur la figure 5.10b (respectivement 650 et 70).

Sur la figure 5.10, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec ICCG sans la pré-résolution pour les termes sources dure environ 2 heures et fait autour de 2700 itérations avec le terme source \mathbf{H}_s . Alors que la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_s avec MUMPS dure environ 55 minutes. Avec le terme source \mathbf{H}_j projeté à partir d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ou le terme source \mathbf{A}_j projeté à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ou à partir d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le solveur ICCG est plus rapide, environ 40 minutes, 2 500 itérations avec \mathbf{H}_j et 1 700 itérations avec \mathbf{A}_j sur la figure 5.10. La résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le solveur MUMPS est un peu plus lente, environ 50 minutes avec les termes sources \mathbf{H}_j et \mathbf{A}_j .

5.2.5 Récapitulatif

En résumé, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j la projection à partir d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ne sera pas utilisée, parce que la pré-résolution en \mathbf{H}_j conduit à des isovaleurs de \mathbf{B} fausses sur les figures 5.9c et 5.9d. En regardant les temps de calcul sur la figure 5.10a, la pré-résolution de la source et la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec la source \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ sont plus rapides qu'avec la source \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et qu'avec la source \mathbf{H}_s à partir de la loi de Biot et Savart. Finalement, le meilleur terme source pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées est la source \mathbf{A}_j projetée à partir d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, comme pour l'encoche dans la section 5.1.

De plus, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le solveur itératif ICCG sans arbre d'arêtes est un peu plus rapide, mais dans un même ordre de grandeur, que la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le solveur direct MUMPS avec un arbre d'arêtes.

Dans la prochaine section, un problème en magnétique transitoire sera étudié : le problème 24 du T.E.A.M. Workshop. La formulation en $\mathbf{A} - V$ sera étudiée avec les termes sources pour des bobines maillées ou non, choisis dans les sections 5.1 et 5.2. Pour des bobines maillées, le terme source est \mathbf{H}_j , la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Alors que pour des bobines non maillées, le terme source est \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

5.3 Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire

La géométrie, le maillage et des résultats pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop sont donnés dans les articles [Rodger *et al.*, 1994] et [Allen et Rodger, 1996].

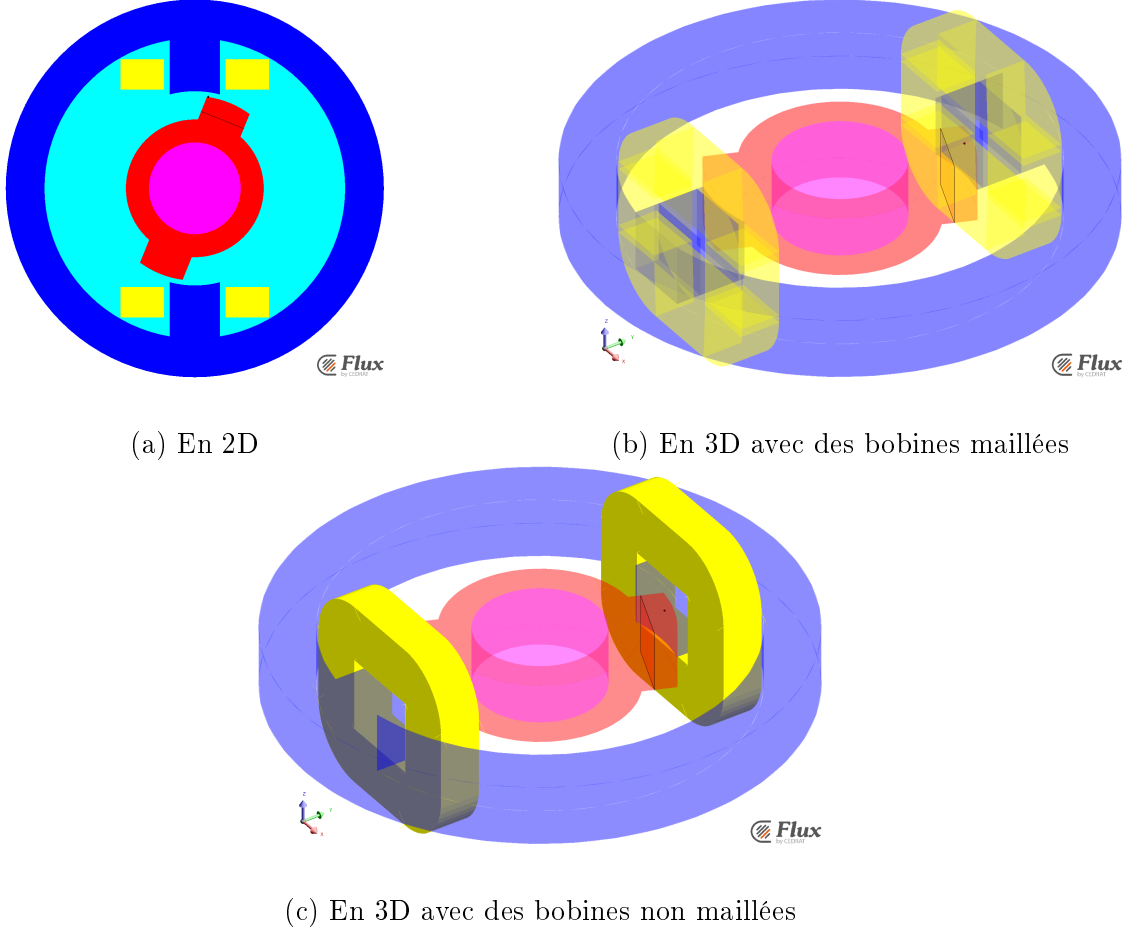


FIGURE 5.11 – Géométrie du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.1 Description du problème

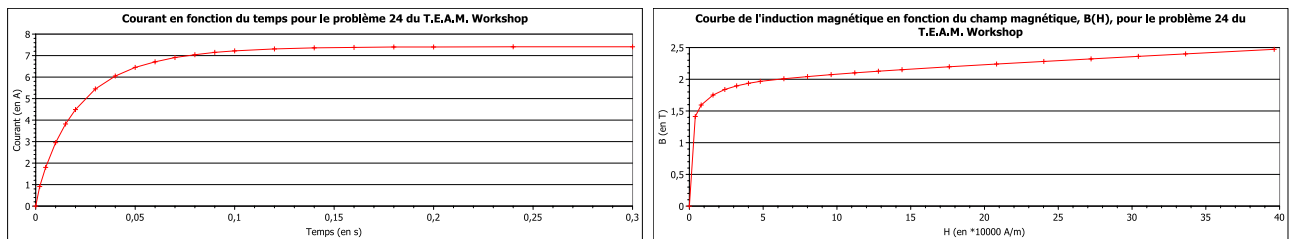
Le problème 24 du T.E.A.M. Workshop est une machine avec un rotor bloqué à 22° par rapport à l'axe y . Ce problème sera étudié en deux et en trois dimensions. En 2D, la formulation utilisée est celle en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux. En 3D, les formulations utilisées seront celle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) de la sous-section 3.2.1 avec une approximation d'arête pour \mathbf{A} et une approximation nodale pour V et celle en $\mathbf{T} - \phi$ [Le Floch, 2002] avec une approximation d'arête pour \mathbf{T} et une approximation nodale pour ϕ . Pour des bobines maillées, le terme source de la formulation en $\mathbf{A} - V$ est le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j (4.66) du paragraphe 4.3.3.1.2, la projection de la densité de courant source \mathbf{J}_s avec la semi-norme de l'espace des éléments d'arête $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Alors que pour des bobines non maillées, le terme source de la formulation en $\mathbf{A} - V$ est le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j (4.68) du paragraphe 4.3.3.1.3, la projection du champ magnétique source \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. La dimension

5.3. PROBLÈME 24 DU T.E.A.M. WORKSHOP EN MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE

deux permet de vérifier que les résultats obtenus en trois dimensions sont corrects, puisqu'en deux dimensions, la formulation en \mathbf{A} est utilisée et validée. La machine aura soit des bobines maillées, soit des bobines non maillées. La différence entre les bobines maillées et non maillées est expliquée dans la section 4.1.

Cette machine est étudiée en régime transitoire avec le courant des bobines variant en fonction du temps. Les périodes de temps étudiées varient de 0 à 0,3 secondes avec des pas de temps tous les 0,005 secondes. Dans les derniers pas de temps, le régime transitoire devient permanent.

Sur cette machine, les grandeurs étudiées seront le couple, le flux qui traverse une section d'un pôle magnétique du rotor, le flux dans les bobines et l'induction magnétique \mathbf{B} en un point dans l'air entre les pôles magnétiques du rotor et du stator. Cette étude permettra de vérifier que la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources \mathbf{H}_j pour des bobines maillées et \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées donne des bons résultats sur un cas réel et de les comparer à la formulation en $\mathbf{T} - \phi$. De plus, elle permettra aussi de montrer la dualité des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$.



(a) Courant des bobines en fonction du temps

(b) Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$

FIGURE 5.12 – Courant imposé aux bobines en fonction du temps et courbe de l'induction \mathbf{B} en fonction du champ \mathbf{H} du stator et du rotor pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.1.1 Géométrie

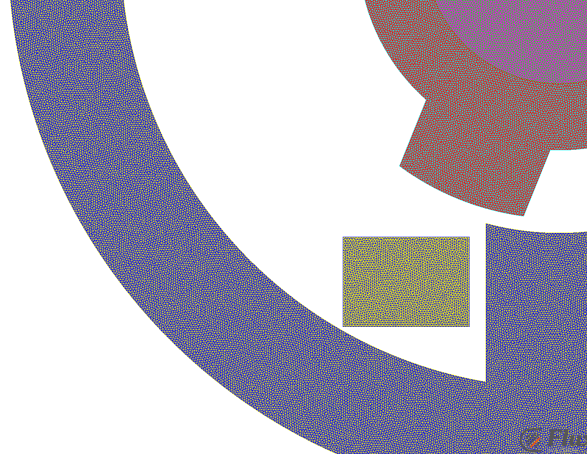
La géométrie du problème 24 du T.E.A.M. Workshop est décrite en deux dimensions sur la figure 5.11a et en trois dimensions avec des bobines maillées sur la figure 5.11b et avec des bobines non maillées sur la figure 5.11c.

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Couleur sur la figure 5.11
Air	μ_0	0	Turquoise
Stator	Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 5.12b	$4,54 * 10^6 \text{ S.m}^{-1}$	Bleu
Rotor	Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 5.12b	$4,54 * 10^6 \text{ S.m}^{-1}$	Rouge
Axe	μ_0	$1,4 * 10^7 \text{ S.m}^{-1}$	Rose
Bobine	μ_0	-	Jaune

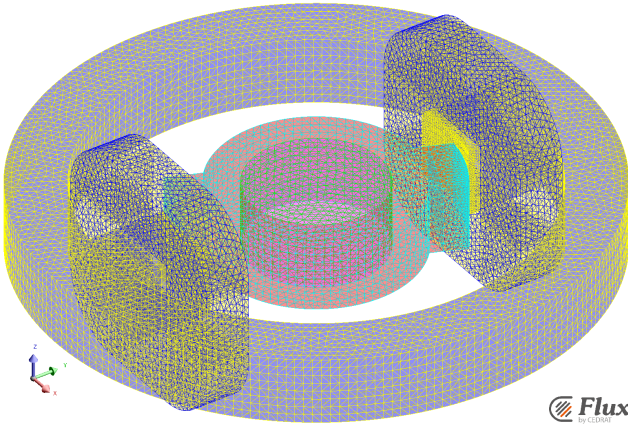
TABLEAU 5.5 – Détails des régions du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Cette machine est composée d'un stator, d'un rotor, d'un axe et de deux bobines. Ces différentes régions de la machine sont détaillées dans le tableau 5.5. Chaque bobine, maillée ou non, est composée de 350 tours avec un courant variant en fonction du temps, représenté sur la figure 5.12a. Ce courant vaut 0 A au début (à $t = 0$ s) pour converger vers un courant constant

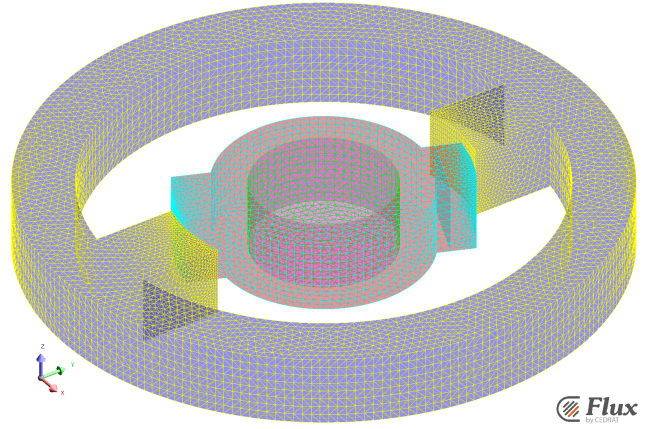
valant 7,41 A à partir du temps 0,24 s. Pour modéliser l'infini, une transformation de l'infini, qui n'est pas représentée sur la figure 5.11, est effectuée sur la machine [Brunotte, 1991]. Le stator et le rotor sont séparés par une zone d'air, l'entrefer. Le stator, le rotor et l'axe sont des régions conductrices. L'axe est composé d'un matériau linéaire. Alors que le stator et le rotor sont composés du même matériau non-linéaire. Pour ce matériau non-linéaire, la figure 5.12b représente l'induction magnétique \mathbf{B} en fonction du champ magnétique \mathbf{H} . Puisque le problème 24 a un matériau non-linéaire, la méthode de Newton-Raphson, décrite dans l'annexe C, sera utilisée pour résoudre ce problème.



(a) En 2D zoomé



(b) En 3D avec des bobines maillées



(c) En 3D avec des bobines non maillées

FIGURE 5.13 – Maillages du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.1.2 Maillages

Les maillages du problème 24 du T.E.A.M. Workshop sont représentés sur la figure 5.13. En 2D, le maillage est composé de 707 743 nœuds et 353 858 éléments, il est très fin pour obtenir des valeurs de référence. Le zoom du maillage est représenté sur la figure 5.13a. En 3D avec des bobines maillées, le maillage de la figure 5.13b est composé de 291 334 nœuds et 217 386 éléments. Sur la figure 5.13c, le maillage en 3D avec des bobines non maillées est composé de 298 089 nœuds et 222 479 éléments. Les maillages des figures 5.13b et 5.13c sont identiques, les différences du nombre de nœuds et d'éléments proviennent du maillage des bobines. En 2D,

le maillage est du deuxième ordre et composé de triangles. En 3D, le maillage est du deuxième ordre et composé de tétraèdres.

Dans cette sous-section, la géométrie et le maillage ont été étudiés. Dans les prochaines sous-sections, le couple, le flux et l'induction magnétique \mathbf{B} en un point seront étudiés sur ce problème 24 du T.E.A.M. Workshop. De plus dans les prochaines figures représentant ces résultats, les croix rouges représenteront la formulation en $\mathbf{A} - V$ en 2D ; les triangles violets la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, décrite dans [Le Floch, 2002] ; et les carrés bleus la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j pour les bobines maillées, la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, et avec \mathbf{A}_j pour les bobines non maillées, la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, décrite dans le chapitre 3 et la section 4.3. Lorsque les bobines sont maillées, ces formes géométriques seront remplies, alors qu'avec des bobines non maillées, elles seront vides.

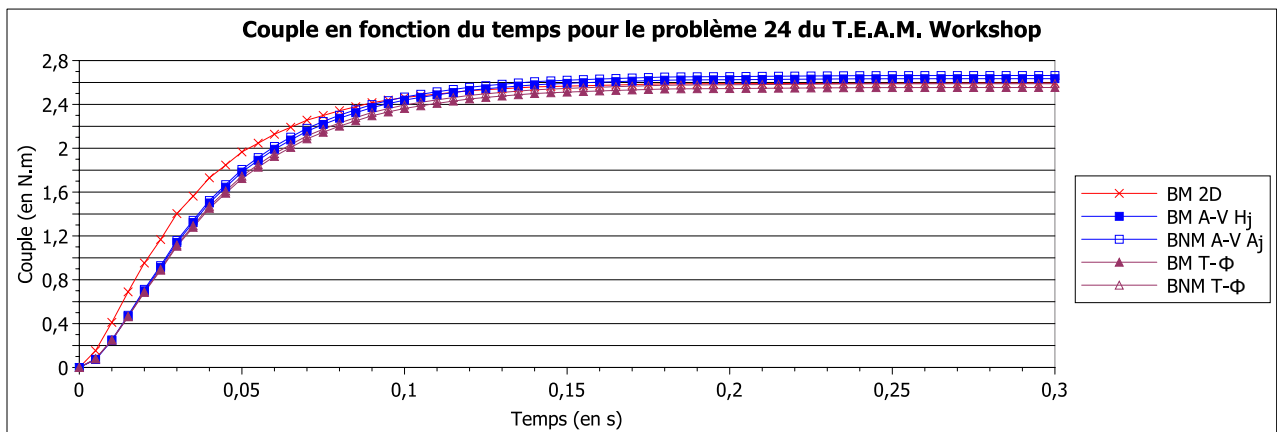


FIGURE 5.14 – Couple en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.2 Couple

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines maillées ou non, le couple des régions rotor et axe en fonction du temps est représenté sur la figure 5.14 pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. En 3D, le couple est similaire pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. En outre, plus le temps est grand, plus le couple obtenu avec ces formulations en 3D est similaire à celui obtenu avec la formulation en 2D. Ceci est dû au fait que la formulation en 2D ne prend pas en compte l'air au-dessus et au-dessous du dispositif.

La figure 5.15 représente l'écart relatif du couple par rapport à la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées en fonction du temps. Le but de cette figure est d'évaluer l'écart des résultats pour le couple entre les bobines maillées et non maillées et entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. Les écarts relatifs sont grands aux premiers pas de temps parce que les grandeurs comparées sont petites. Pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, l'écart relatif du couple des bobines maillées par rapport à des bobines non maillées est inférieur à 2 % pour tous les pas de temps. De plus pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, l'écart entre des bobines maillées et des bobines non maillées est aussi inférieur à 2 %. Avec des bobines maillées, l'écart relatif du couple entre les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ est inférieur à 3 %, à partir du 3^{ème} pas de temps. Avec des bobines non maillées, il est aussi inférieur à 3 % à partir du 3^{ème} pas de temps.

Finalement, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées ou non n'influent pas sur le résultat du couple. Dans la prochaine sous-section, la même étude sera effectuée sur le flux magnétique.

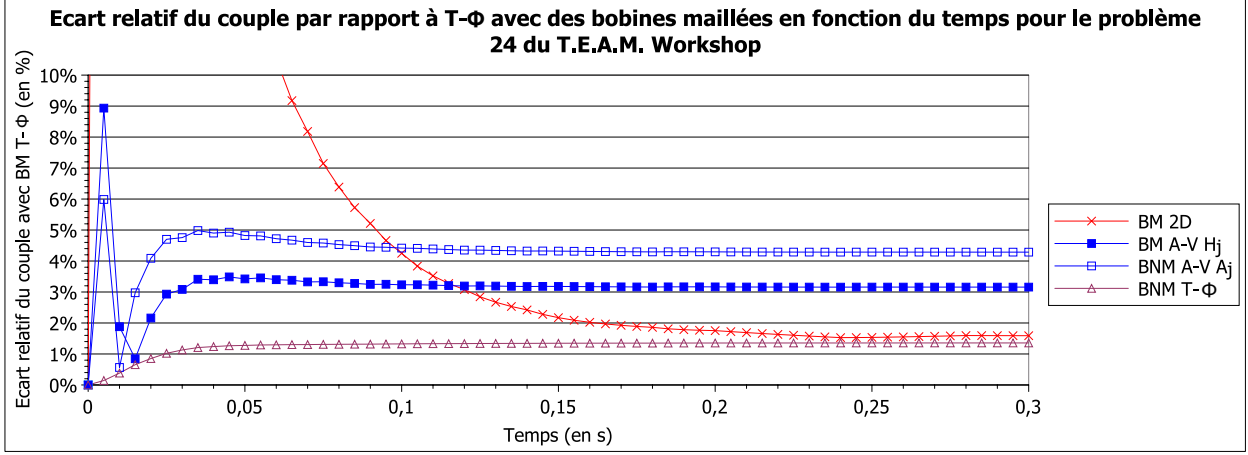


FIGURE 5.15 – Écart relatif du couple par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.3 Flux magnétique

5.3.3.1 A travers une section d'un pôle magnétique du rotor

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop, le flux magnétique à travers une section d'un pôle magnétique du rotor en fonction du temps est représenté sur la figure 5.16. La section du pôle du rotor, sur laquelle est calculée le flux, est visible en noire sur la figure 5.11. En 3D, le flux sur le pôle du rotor est similaire pour les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ que les bobines soient maillées ou non. En 2D, plus le temps augmente, plus les résultats sont similaires au 3D. Lorsque le temps est grand, la machine est en régime permanent et l'effet 3D n'a plus d'importance, alors le 2D est identique au 3D.

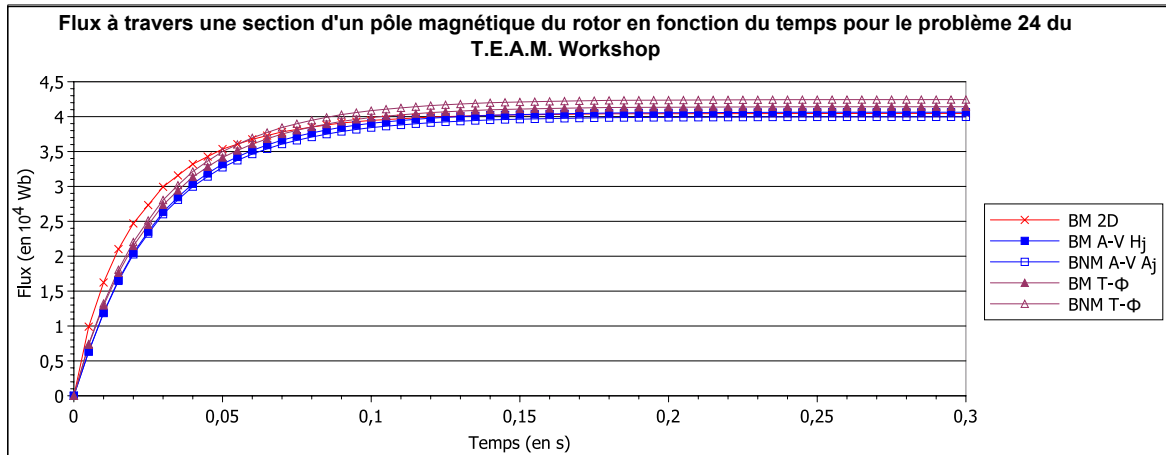


FIGURE 5.16 – Flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La figure 5.17 représente l'écart relatif du flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor en fonction du temps par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées. Le but de cette figure est de mesurer l'écart du flux entre les bobines maillées et les bobines non maillées et entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. Pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, l'écart relatif pour le flux entre des bobines maillées et des bobines non maillées est inférieur à 3 %. Pour la

5.3. PROBLÈME 24 DU T.E.A.M. WORKSHOP EN MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE

formulation en $\mathbf{A} - V$, il est inférieur à 2 %. L'écart relatif entre les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ est d'environ 2 % avec des bobines maillées et avec des bobines non maillées.

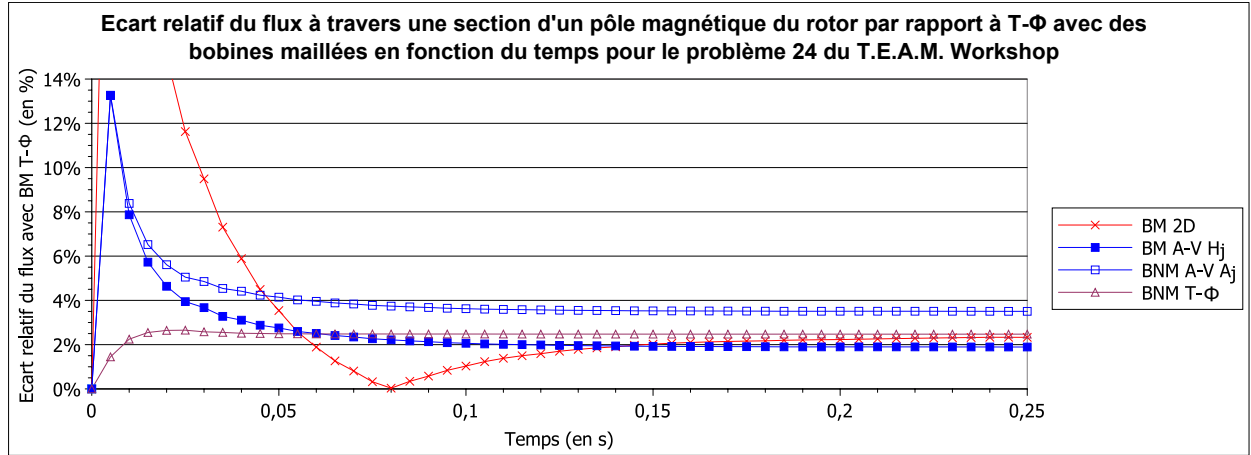


FIGURE 5.17 – Écart relatif du flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Finalement, les bobines maillées ou non n'influent pas sur le calcul du flux sur l'encoche du rotor. Dans le prochain paragraphe, le flux sera étudié pour les bobines.

5.3.3.2 Des bobines

La figure 5.18 représente aussi le flux en fonction du temps, mais celui des bobines du problème 24 du T.E.A.M. Workshop. En 3D, le flux des bobines en fonction du temps est similaire pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ que les bobines soient maillées ou non. En revanche, le flux des bobines en 2D est différent de celui en 3D, parce que les bobines en 2D ont une géométrie différente de celles en 3D.

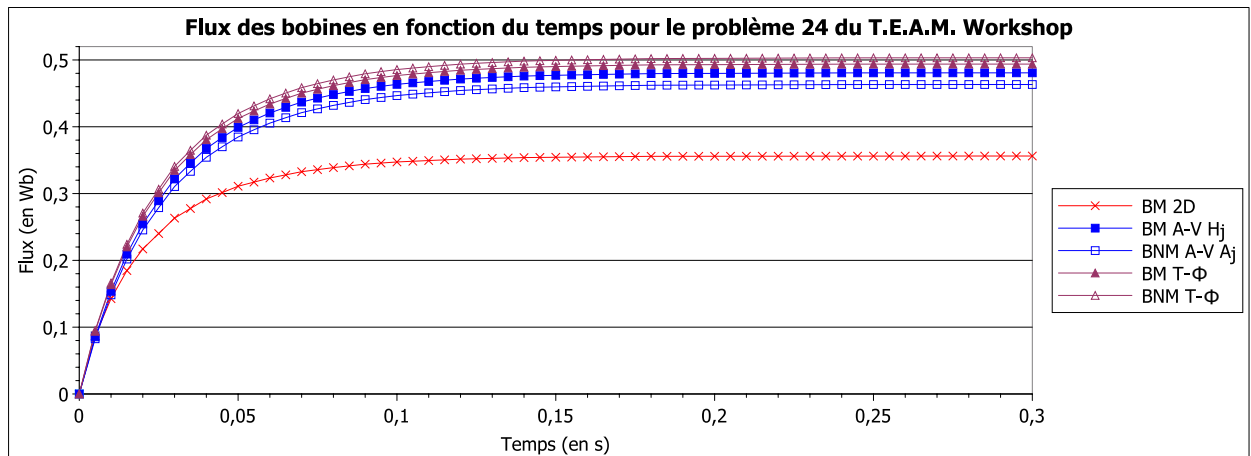


FIGURE 5.18 – Flux des bobines en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La figure 5.19 représente l'écart relatif du flux des bobines en fonction du temps par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées. Cette figure permet de mesurer l'écart relatif du flux des

bobines maillées et non maillées et des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. Avec des bobines non maillées, l'écart relatif de la formulation en $\mathbf{A} - V$ est grand. Ceci est dû aux bobines non maillées, car leurs maillages ne correspondent pas à leurs géométries. Pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, l'écart relatif du flux entre des bobines maillées et non maillées est d'environ 2 %. Pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, il est d'environ 3 %. Pour des bobines maillées, l'écart relatif du flux des bobines entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ est d'environ 3 %. Pour des bobines non maillées, l'écart relatif du flux des bobines entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ est d'environ 4 %.

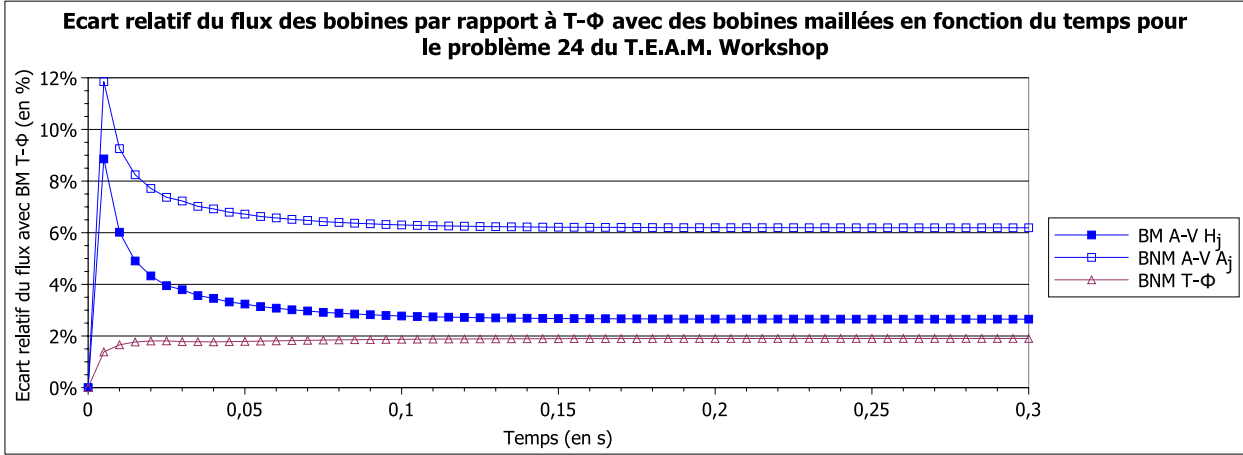


FIGURE 5.19 – Écart relatif du flux des bobines par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Finalement, les choix de la formulation et des bobines maillées ou non n'influent pas sur le flux des bobines. Cependant pour calculer le flux des bobines, il vaut mieux utiliser des bobines maillées pour que le maillage des bobines corresponde à leur géométrie. Dans la prochaine sous-section, une grandeur locale, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} , sera étudiée en un point.

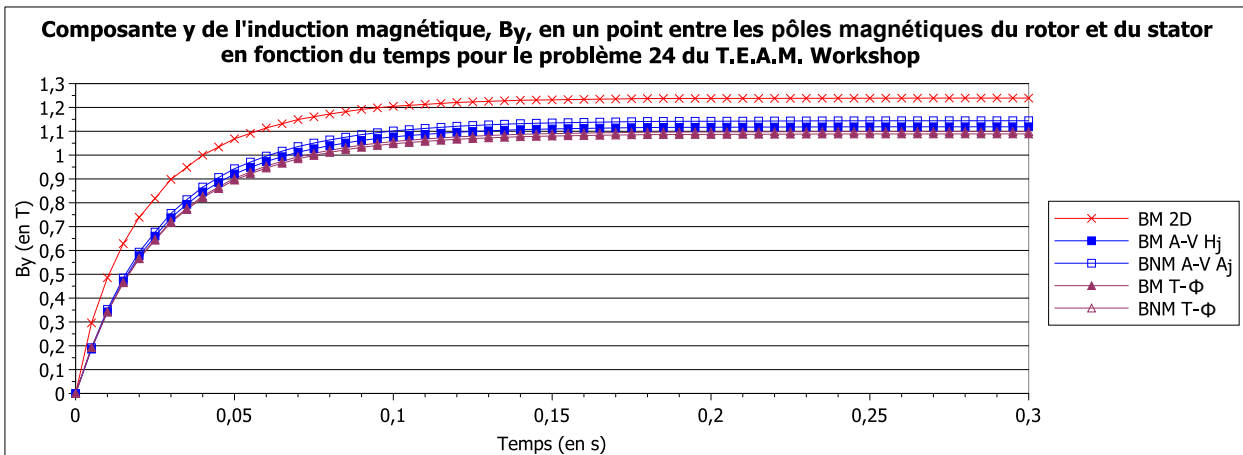


FIGURE 5.20 – Composante en y de l'induction magnétique, B_y , en un point entre le rotor et le stator en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.4 Induction magnétique \mathbf{B} en un point

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point entre les pôles du rotor et du stator en fonction du temps est représenté sur la figure 5.20. Le point de calcul de \mathbf{B} est en noir sur la figure 5.11. En 3D, la composante en y de \mathbf{B} , B_y , est similaire pour les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ que les bobines soient maillées ou non. La formulation en 2D est différente des formulations en 3D, elle ne prend pas en compte les effets de saturation et de flux de fuite en 3D, ce qui se ressent beaucoup sur cette valeur ponctuelle.

La figure 5.21 représente l'écart relatif de B_y en un point dans l'entrefer en fonction du temps par rapport à la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées. Le but de cette figure est de mesurer l'écart de B_y entre les bobines maillées et non maillées et entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. Pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, l'écart relatif de B_y en un point de l'entrefer est inférieur à 1 % entre les bobines maillées et non maillées. Pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, il est de 2 % environ. Donc que les bobines soient maillées ou non n'influe pas sur la valeur en un point de l'induction magnétique. Avec des bobines maillées, l'écart relatif de B_y entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ est de 3 %. Avec des bobines non maillées, l'écart relatif de B_y entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ est inférieur à 5 %.

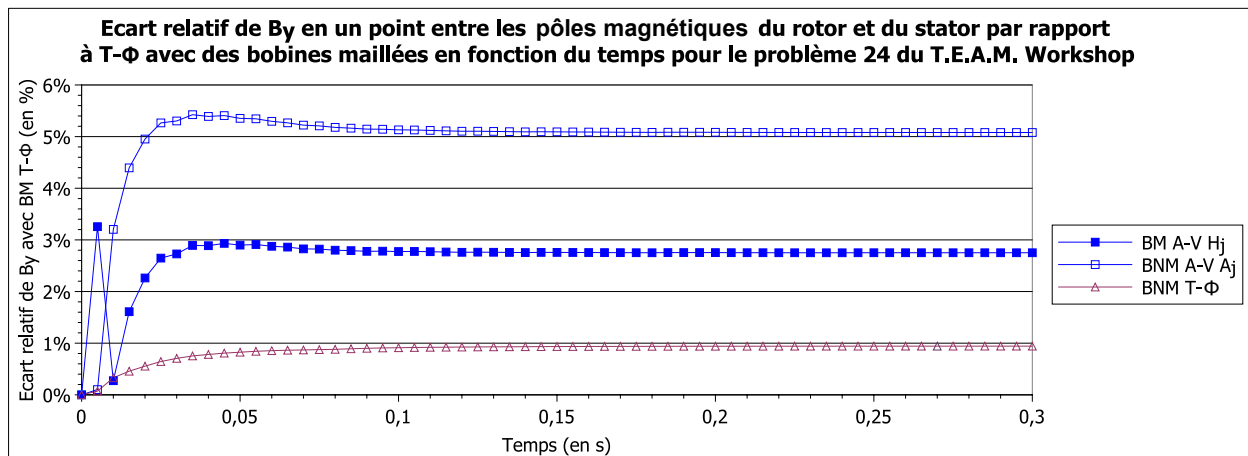


FIGURE 5.21 – Écart relatif de B_y en un point entre le rotor et le stator par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

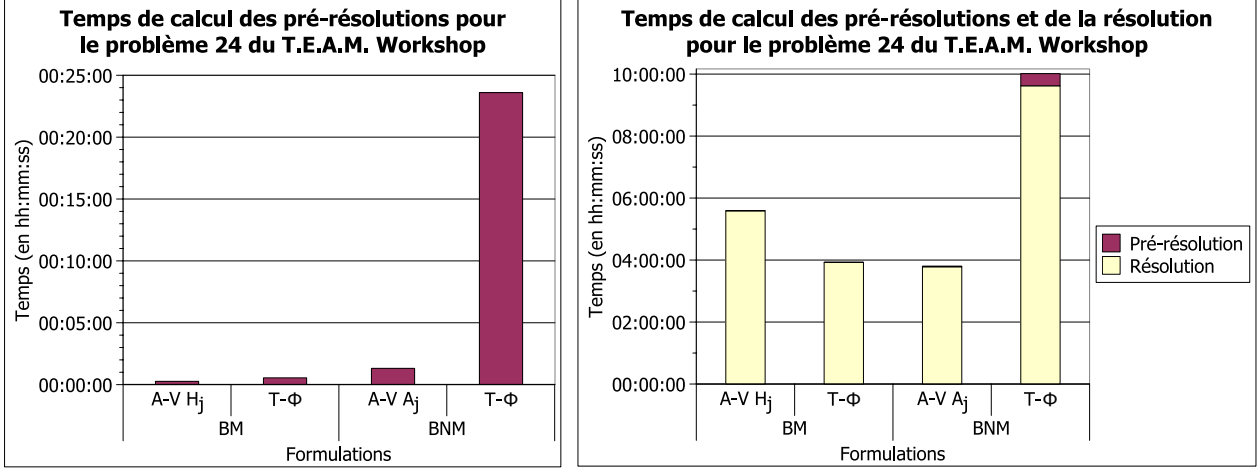
Finalement en 3D, que les bobines soient maillées ou non et que la formulation utilisée soit celle en $\mathbf{T} - \phi$ ou en $\mathbf{A} - V$ n'influe pas sur la valeur de la composante en y de l'induction magnétique en un point de l'entrefer.

Dans ces dernières sous-sections, l'influence des bobines maillées ou non et de la formulation utilisée, en $\mathbf{T} - \phi$ ou en $\mathbf{A} - V$, a été étudiée sur des grandeurs globales, le couple et le flux, et sur une grandeur locale, B_y . Il a été conclu que le maillage des bobines et la formulation utilisée n'influent pas sur le calcul du couple, du flux et de la composante en y de \mathbf{B} . Donc, la formulation en $\mathbf{A} - V$ développée pour des bobines maillées et non maillées donnent les mêmes résultats en magnétique transitoire que la formulation en $\mathbf{T} - \phi$.

Dans la prochaine sous-section, les temps de calculs et le nombre d'itérations d'ICCG des pré-résolutions et des résolutions des formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ en 3D seront détaillés. Ils ne seront pas étudiés en 2D, puisqu'ils seront forcément plus courts.

5.3.5 Temps de calcul du solveur

Les temps de calcul des pré-résolutions et de la résolution des formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines maillées ou non sont donnés sur la figure 5.22b. Le détail des temps de pré-résolutions est donné sur la figure 5.22a. Les pré-résolutions et les résolutions sont effectuées avec le solveur itératif du gradient conjugué, ICCG.



(a) Pré-résolutions

(b) Pré-résolutions & Résolution

FIGURE 5.22 – Temps de calcul des pré-résolutions et de la résolution pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Sur la figure 5.22a, le temps de pré-résolution de la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines non maillées est très long (plus de 20 minutes). Alors que le temps de pré-résolution de la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées est de seulement 30 secondes. Pour ces calculs, les formulations utilisées sont celles par défaut dans Flux[®], qui sont des formulations en $\mathbf{T} - \phi$. Cependant, les formulations par défaut ne sont pas les mêmes avec des bobines maillées et avec des bobines non maillées. Avec des bobines non maillées, une pré-résolution de l'incrément réduit-total, reliant le potentiel scalaire réduit ϕ_r calculé dans l'air au potentiel scalaire total ϕ calculé dans le reste du dispositif, est faite au début de chaque pas de temps. Avec des bobines maillées, des pré-résolutions sont effectuées seulement au début du premier pas de temps. De plus, les temps de pré-résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ sont plus court : la pré-résolution avec des bobines maillées en \mathbf{H}_j , projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, prend 15 secondes ; et la pré-résolution avec des bobines non maillées en \mathbf{A}_j , projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, prend environ 1 minute et 20 secondes.

Avec des bobines maillées, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue sans la pré-résolution en 5 heures et 35 minutes et la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ en 3 heures et 55 minutes d'après la figure 5.22b. Avec des bobines non maillées, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue en 3 heures et 45 minutes et la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ en 9 heures et 35 minutes.

Du plus lent au plus rapide, les temps totaux de pré-résolutions et de résolution de la figure 5.22b sont pour les formulations : en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines non maillées (en 10 heures), en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines maillées (en 5 heures et 35 minutes), en $\mathbf{T} - \phi$ avec des bobines maillées (en 3 heures et 55 minutes) et en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées (en 3 heures et 50 minutes).

Finalement avec des bobines maillées, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j est résolue un peu moins vite que celle en $\mathbf{T} - \phi$ mais dans des temps équivalents. Avec des bobines non maillées, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{A}_j est beaucoup plus rapide que la formulation en $\mathbf{T} - \phi$.

5.3.6 Dualité des formulations

L'étude de la dualité des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ sera faite seulement sur le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines non maillées, représenté sur la figure 5.11c. Les résultats sur le problème 24 avec des bobines maillées seraient similaires. Pour montrer la dualité des formulations, il faut étudier les maillages du plus lâche au plus fin. Dans le prochain paragraphe, ces maillages sont présentés.

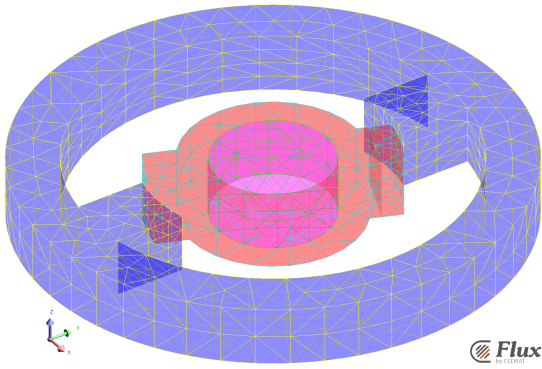
5.3.6.1 Maillages

Neuf maillages ont été créés pour étudier la dualité sur le problème 24 avec des bobines non maillées. Ces différents maillages sont représentés sur la figure 5.23, sauf le maillage 8. Le maillage 8 est celui utilisé dans les sous-sections précédentes et représenté sur la figure 5.23. Le nombre de nœuds et d'éléments des maillages sont donnés dans le tableau 5.6. La différence entre les maillages est la finesse du maillage : plus le numéro du maillage est grand, plus le maillage est fin. Les maillages du problème 24 sont du deuxième ordre et composés uniquement de tétraèdres.

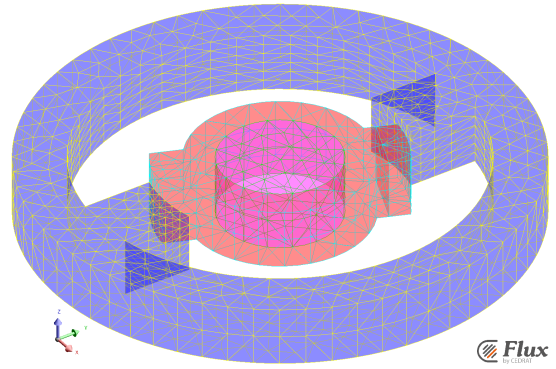
Maillage	Nombre de	
	Nœuds	Éléments
1	7 626	5 529
2	15 745	11 540
3	25 248	18 561
4	43 013	31 666
5	94 958	70 405
6	160 276	119 180
7	225 204	167 629
8	298 089	222 479
9	404 967	302 561

TABLEAU 5.6 – Détails des maillages du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

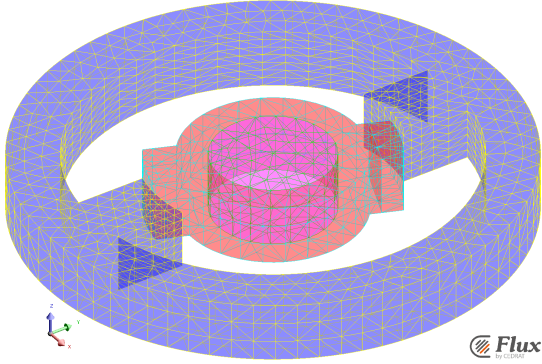
Dans ce paragraphe, les maillages utilisés pour montrer la dualité des formulations ont été étudiés. Dans les prochains paragraphes, le flux, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la densité de courant \mathbf{J}_e seront étudiés sur ce problème 24 du T.E.A.M. Workshop pour montrer la dualité des formulations en potentiel scalaire magnétique et en potentiel vecteur magnétique. De plus dans les prochaines figures représentant ces résultats, les triangles violets représenteront la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, décrite dans [Le Floch, 2002]; et les carrés bleus la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{A}_j pour les bobines non maillées, la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, décrite dans le chapitre 3 et la section 4.3.



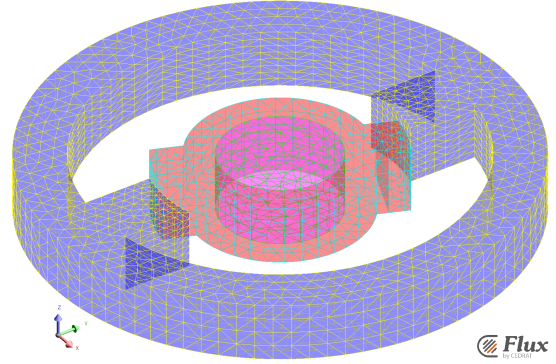
(a) Maillage 1



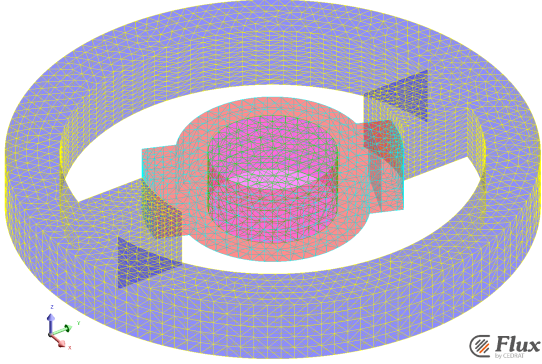
(b) Maillage 2



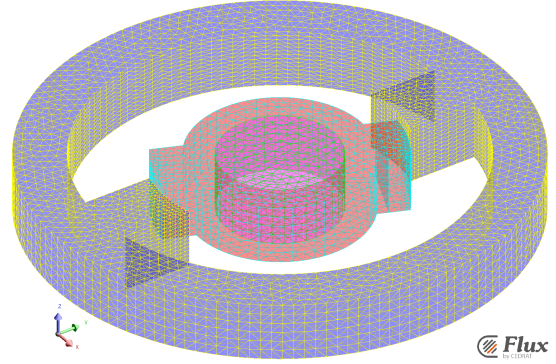
(c) Maillage 3



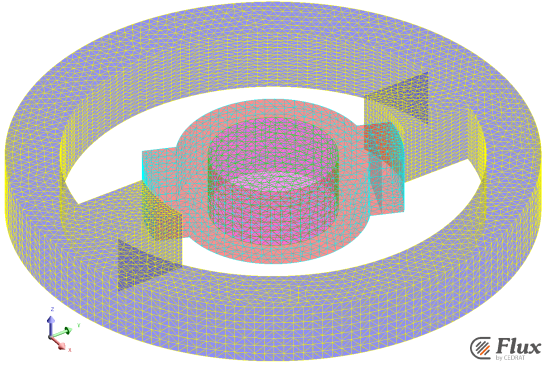
(d) Maillage 4



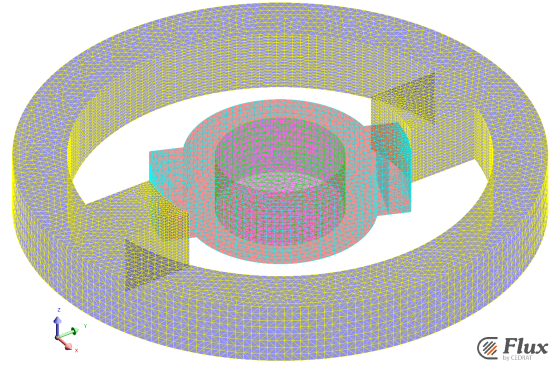
(e) Maillage 5



(f) Maillage 6



(g) Maillage 7

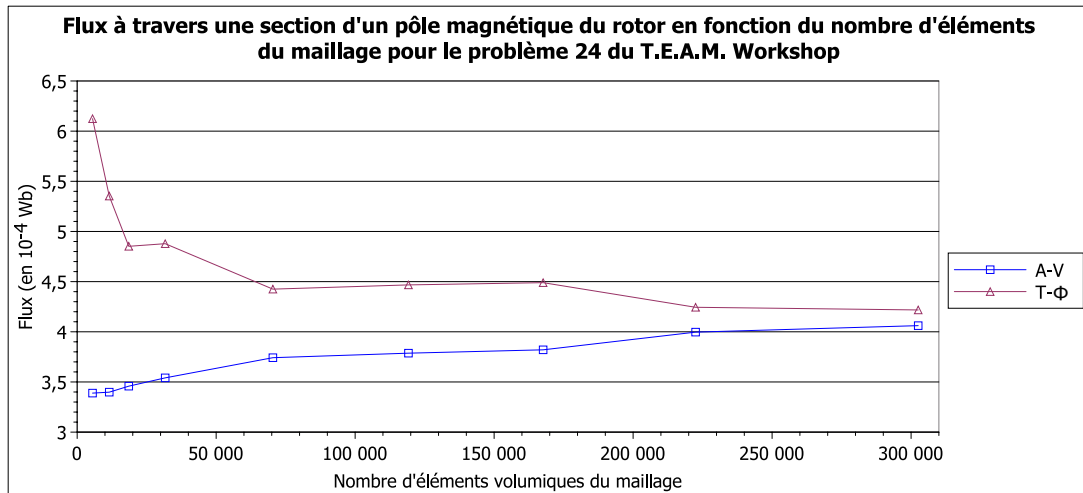


(h) Maillage 9

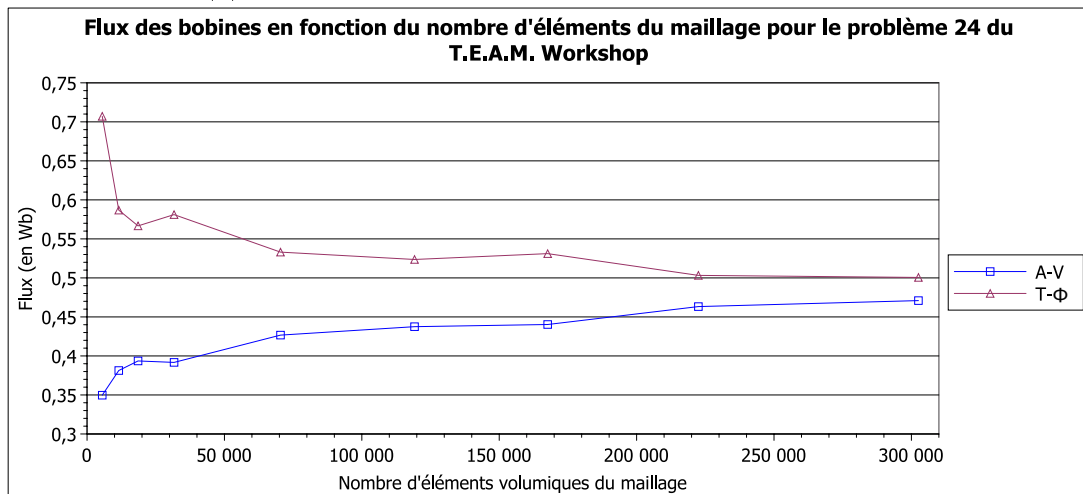
FIGURE 5.23 – Maillages du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

5.3.6.2 Flux magnétique

Pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$, le flux magnétique du problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines non maillées en fonction du nombre d'éléments dans le maillage est représenté sur la figure 5.24a à travers la section d'un pôle magnétique du rotor et sur la figure 5.24b pour les bobines non maillées. Le flux magnétique a été calculé pour les neuf maillages de la figure 5.23, le nombre d'éléments correspondant à ces maillages est donné dans le tableau 5.6.



(a) A travers la section d'un pôle magnétique du rotor



(b) Des bobines

FIGURE 5.24 – Flux magnétique en fonction du nombre d'éléments dans le maillage pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Les courbes de la figure 5.24 sont différentes pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ pour le flux à travers le pôle et le flux des bobines. Mais plus le maillage est fin (plus le nombre d'éléments dans le maillage est grand), plus les courbes des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ convergent vers la même valeur de flux magnétique en encadrant cette valeur, la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ converge en décroissant et la formulation en $\mathbf{A} - V$ en croissant.

Dans ce paragraphe, la dualité des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ a été démontrée

sur le flux en fonction du maillage. Dans le prochain paragraphe, elle sera démontrée avec les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la densité de courant \mathbf{J}_e .

5.3.6.3 Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la densité de courant \mathbf{J}_e

Dans ce paragraphe, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la densité de courant \mathbf{J}_e seront comparées pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ sur le maillage 8 de la figure 5.13c.

Les isovaleurs de \mathbf{B} sont représentées sur la figure 5.25 et celles de \mathbf{J}_e sur la figure 5.26. Les figures à gauche 5.25a des isovaleurs de \mathbf{B} et 5.26a des isovaleurs de \mathbf{J}_e sont calculées avec la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Alors que les figures à droite 5.25b et 5.26b respectivement des isovaleurs de \mathbf{B} et de \mathbf{J}_e sont calculées avec la formulation en $\mathbf{T} - \phi$.

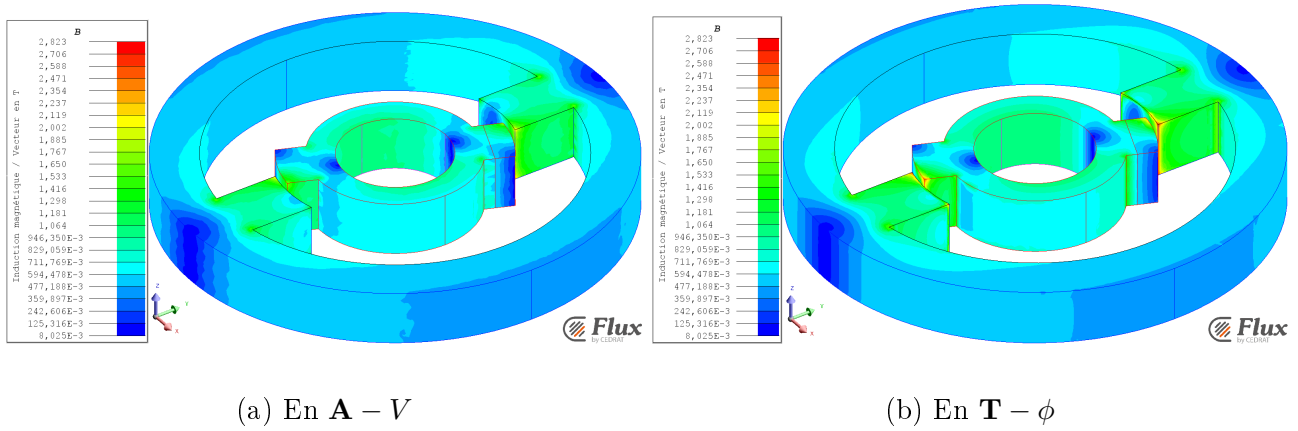


FIGURE 5.25 – Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

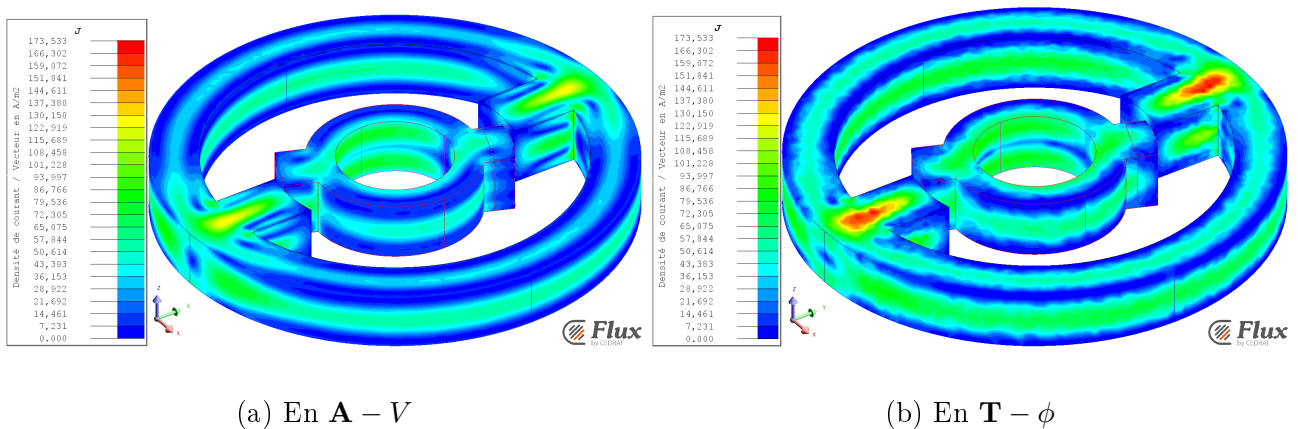


FIGURE 5.26 – Isovaleurs de la densité de courant \mathbf{J}_e pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Les isovaleurs de \mathbf{B} avec la formulation en $\mathbf{A} - V$ de la figure 5.25a sont moins nettes que celles avec la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ de la figure 5.25b. Dans le logiciel Flux[®], les grandeurs calculées avec des éléments finis nodaux sont interpolées par défaut au 2^{ème} ordre et celles calculées avec des éléments finis d'arêtes au 1^{er} ordre. Donc les potentiels scalaires magnétique ϕ et

5.4. CONCLUSION

électrique V sont au 2^{ème} ordre, tandis que les potentiels vecteurs magnétique \mathbf{A} et électrique \mathbf{T} sont au 1^{er} ordre. Alors pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, le calcul de \mathbf{B} est fait à partir du rotationnel du potentiel \mathbf{A} : \mathbf{A} est une grandeur du 1^{er} ordre alors \mathbf{B} , la dérivée dans l'espace d' \mathbf{A} , est une grandeur d'ordre 0. Pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, \mathbf{B} est calculé à partir du potentiel \mathbf{T} , une grandeur du 1^{er} ordre, et du gradient de ϕ , une grandeur du 1^{er} ordre puisque c'est la dérivée de ϕ une grandeur du 2^{ème} ordre. Finalement, \mathbf{B} est une grandeur d'ordre 0 pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ et d'ordre 1 pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, c'est pourquoi les isovaleurs de \mathbf{B} sont plus nettes pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ que pour celle en $\mathbf{A} - V$.

A l'inverse, les isovaleurs de \mathbf{J}_e avec la formulation en $\mathbf{A} - V$ de la figure 5.26a sont plus nettes que celles avec la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ de la figure 5.26b. Car pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, le calcul de \mathbf{J}_e nécessite une dérivée dans l'espace du potentiel \mathbf{T} , une dérivée d'une grandeur d'ordre 1, donc \mathbf{J}_e est une grandeur d'ordre 0. Pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, \mathbf{J}_e est calculée directement à partir du potentiel \mathbf{A} , une grandeur du 1^{er} ordre, et du gradient de V , une grandeur du 1^{er} ordre puisque c'est la dérivée de V du 2^{ème} ordre. Finalement, \mathbf{J}_e est une grandeur d'ordre 0 pour la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ et d'ordre 1 pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, c'est pourquoi les isovaleurs de \mathbf{J}_e sont plus nettes pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ que pour celle en $\mathbf{T} - \phi$.

Donc, ce problème 24 du T.E.A.M. Workshop a permis de montrer la dualité des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$: la formulation en $\mathbf{A} - V$ calcule mieux la densité de courant \mathbf{J}_e que la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, mais moins bien l'induction magnétique \mathbf{B} ; et plus le maillage est fin, plus les deux formulations convergent vers la même valeur de flux en l'encadrant.

5.4 Conclusion

Les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ ont aussi été étudiées dans ce chapitre. Finalement, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ sont équivalentes avec des bobines maillées ou non maillées. Mais la formulation en $\mathbf{A} - V$ est plus simple à implémenter, elle est donc choisie comme la formulation à utiliser.

Les termes sources pour les formulations en potentiel vecteur magnétique ont aussi été étudiés dans ce chapitre. Le meilleur terme source pour les bobines maillées est le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j , calculé par la projection de la densité de courant source \mathbf{J}_s avec la semi-norme de l'espace des éléments d'arête $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Pour les bobines non maillées, le meilleur terme source est le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j , calculé par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Dans le prochain chapitre, le calcul des termes sources sera étudié sur un domaine réduit du domaine entier Ω pour permettre le mouvement du rotor d'un moteur avec la formulation en $\mathbf{A} - V$ choisie dans ce chapitre et les termes sources choisis, \mathbf{H}_j , la projection de \mathbf{J}_s , pour des bobines maillées et \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s , pour des bobines non maillées.

Chapitre 6

Termes sources sur un domaine réduit des formulations en potentiel vecteur magnétique

Sommaire

6.1	Calcul des termes sources sur un domaine réduit	129
6.1.1	\mathbf{H}_j pour des bobines maillées, la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	130
6.1.2	\mathbf{A}_j pour des bobines non maillées, la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$	130
6.2	Formulations en potentiel vecteur magnétique en magnétique transitoire avec les termes sources sur un domaine réduit	132
6.2.1	Formulations faibles	132
6.2.1.1	\mathbf{H}_j pour des bobines maillées	132
6.2.1.2	\mathbf{A}_j pour des bobines non maillées	133
6.2.1.3	Récapitulatif	133
6.2.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	133
6.2.2.1	\mathbf{H}_j pour des bobines maillées	134
6.2.2.2	\mathbf{A}_j pour des bobines non maillées	135
6.2.2.3	Récapitulatif	136
6.3	Validations et résultats des termes sources sur un domaine réduit	137
6.3.1	Tore en magnétoharmonique	137
6.3.1.1	Description du problème	137
6.3.1.1.1	Géométrie	137
6.3.1.1.2	Maillage	138
6.3.1.2	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}	139
6.3.1.3	Pertes Joule	141
6.3.1.4	Temps de calcul	141
6.3.1.4.1	\mathbf{H}_j pour la bobine maillée	141
6.3.1.4.2	\mathbf{A}_j pour des bobines non maillées	142
6.3.1.5	Récapitulatif	143
6.3.2	Machine asynchrone en magnétoharmonique	143
6.3.2.1	Description du problème	143
6.3.2.2	Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}	144
6.3.2.3	Couple et pertes Joule	145

6.3.2.4	Temps de calcul du solveur	145
6.3.2.5	Récapitulatif	146
6.3.3	Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire	147
6.3.3.1	Description du problème	147
6.3.3.2	Couple	147
6.3.3.3	Flux magnétique	148
6.3.3.3.1	A travers une section d'un pôle magnétique du rotor .	148
6.3.3.3.2	Des bobines	149
6.3.3.4	Induction magnétique \mathbf{B} en un point	150
6.3.3.5	Temps de calcul du solveur	152
6.3.4	Conclusion	152

6.1. CALCUL DES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

Le calcul des termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$ sur un domaine réduit, présenté dans cette partie, a été décrit dans l'article [Ferrouillat *et al.*, 2016].

Dans le chapitre 4, différents calculs de termes sources ont été étudiés pour des bobines maillées et pour des bobines non maillées avec les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$. Ces calculs de termes sources ont été testés et validés dans le chapitre 5 en magnétostatique, en magnétoharmonique et en magnétique transitoire sur des problèmes linéaires et non-linéaires. Cette validation a permis de choisir la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec pour des bobines maillées le terme source \mathbf{H}_j , calculée par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, et pour des bobines non maillées le terme source \mathbf{A}_j , calculée par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

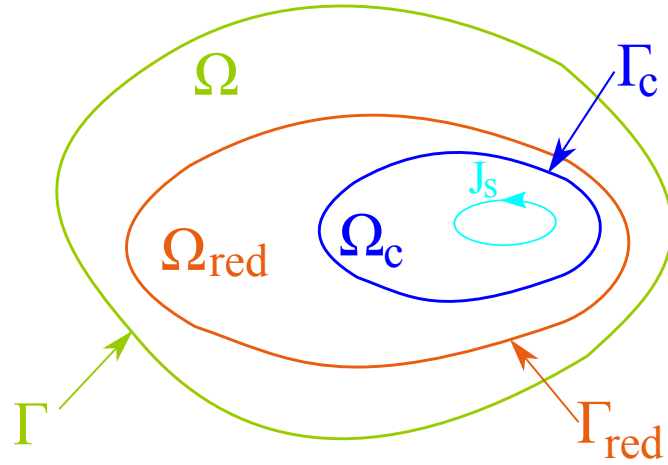


FIGURE 6.1 – Domaines complet Ω , réduit Ω_{red} et des bobines Ω_c et leurs frontières respectives Γ , Γ_{red} et Γ_c

Soient Ω le domaine complet, et Γ sa frontière. Dans les chapitres 4 et 5, les sources \mathbf{A}_j et \mathbf{H}_j sont calculées sur Ω . Cependant, les machines électriques ont une partie mobile, le rotor, et une autre fixe, le stator. Or si une partie du domaine Ω est mobile, il faut assurer la continuité des variables entre les parties du domaine Ω mobile et fixe. Cette continuité doit aussi être assurée pour les sources \mathbf{A}_j et \mathbf{H}_j . Pour éviter d'assurer cette continuité, les sources sont calculées sur un domaine réduit, nommé Ω_{red} , comprenant les bobines, qui sera soit la partie du domaine Ω mobile, soit celle fixe.

Soit Ω_c le domaine des bobines, et Γ_c sa frontière. Le domaine réduit Ω_{red} est défini tel que $\Omega_c \subset \Omega_{red} \subset \Omega$, et la frontière du domaine réduit Ω_{red} , notée Γ_{red} , est telle que Ω_c n'est pas en contact avec Γ_{red} . Ces domaines sont représentés sur la figure 6.1. Le maillage du domaine réduit est noté Ω_{red_h} et le nombre d'arêtes de ce maillage est noté $n_{A_{\Omega_{red}}}$.

6.1 Calcul des termes sources sur un domaine réduit

Dans la section 4.2, les équations et la modélisation discrète avec les éléments finis des termes sources ont été étudiées sur le domaine entier Ω . Dans cette section, la modélisation discrète avec les éléments finis des termes sources sera étudiée sur le domaine réduit Ω_{red} .

6.1.1 \mathbf{H}_j pour des bobines maillées, la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Pour les bobines maillées, le terme source choisi dans le chapitre 5 est \mathbf{H}_j à partir de la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Dans le paragraphe 4.2.1.2.1, l'équation (4.6) du terme source \mathbf{H}_j a été étudiée sur le domaine entier Ω . Dans le paragraphe 4.2.2.2.1, la modélisation avec les éléments finis pour calculer \mathbf{H}_j (4.31) a été étudiée.

Lors du calcul de la source \mathbf{H}_j sur un domaine réduit Ω_{red} , peu de changement ont lieu. Il suffit de remplacer le domaine complet Ω par le domaine réduit Ω_{red} dans les équations (4.6) et (4.31). Alors, la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.31b) n'est plus définie sur la frontière Γ_h mais sur la frontière Γ_{red} . Il est facile d'imposer la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j|_{\Gamma_{red}} = \mathbf{0}$, car il suffit de mettre les circulations d' \mathbf{H}_j , \mathbf{H}_{ja} , à zéro sur les arêtes de la frontière Γ_{red} .

Donc sur le domaine réduit Ω_{red} , le système matriciel (4.31) pour calculer le champ source \mathbf{H}_j par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ devient :

$$R_{RR\Omega_{red}} \mathbf{H}_{ja\Omega_{red}} = \mathbf{M}_{R\mathbf{J}_s\Omega_{red}}, \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{H}_{ja\Omega_{red}} \Big|_{\Gamma_{red}} = \mathbf{0}, \quad (6.1b)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR\Omega_{red}} &= \left[(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega_{red})} \right]_{1 \leq l, k \leq n_{A\Omega_{red}}}, \\ - \mathbf{H}_{ja\Omega_{red}} &= [H_{ja_k}]_{1 \leq k \leq n_{A\Omega_{red}}}, \\ - \mathbf{M}_{R\mathbf{J}_s\Omega_{red}} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{L^2(\Omega_{red})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{red}}}. \end{aligned}$$

Avec cette équation (6.1), la source \mathbf{H}_j est calculée seulement sur le domaine Ω_{red} , elle n'a aucune valeur sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_{red}$.

Dans cette sous-section, le calcul des termes sources sur un domaine réduit Ω_{red} a été étudié pour des bobines maillées avec \mathbf{H}_j (6.1). Dans la prochaine sous-section, il sera étudié pour des bobines non maillées avec \mathbf{A}_j .

6.1.2 \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées, la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$

Pour les bobines non maillées, le terme source choisi dans le chapitre 5 est \mathbf{A}_j à partir de la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Dans le paragraphe 4.2.1.1.4, l'équation (4.5) du terme source \mathbf{A}_j a été étudiée sur le domaine entier Ω . Dans le paragraphe 4.2.2.1.3, c'est la modélisation avec les éléments finis pour calculer \mathbf{A}_j (4.26) qui a été étudiée.

Lors du calcul de la source \mathbf{A}_j sur un domaine réduit Ω_{red} , peu de changement ont lieu. Il suffit de remplacer le domaine complet Ω par le domaine réduit Ω_{red} dans les équations (4.5) et (4.26). Alors, la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (4.26b) n'est plus définie sur la frontière Γ_h mais sur la frontière Γ_{red} . Cependant, il n'est pas possible d'annuler facilement la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j$ sur Γ_{red} , parce qu'elle est faiblement imposée à $\mathbf{n} \times \mu_0 \mathbf{H}_s$ sur Γ_{red} telle que $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j|_{\Gamma_{red}} = \mathbf{n} \times \mu_0 \mathbf{H}_s|_{\Gamma_{red}}$. Alors, aucune condition à la limite n'est imposée sur la frontière Γ_{red} .

Donc sur le domaine réduit Ω_{red} , le système matriciel (4.26) pour calculer le potentiel source \mathbf{A}_j par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ devient :

$$R_{RR\Omega_{red}} \mathbf{A}_{ja\Omega_{red}} = \mathbf{M}_{R\mathbf{H}_s\mu_0\Omega_{red}}. \quad (6.2)$$

6.1. CALCUL DES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

avec

$$\begin{aligned}
 - R_{RR_{\Omega_{red}}} &= \left[(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \right]_{1 \leq l, k \leq n_{A_{\Omega_{red}}}}, \\
 - \mathbf{A}_{\mathbf{j}_{\mathbf{a}_{\Omega_{red}}}} &= [A_{j_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_{A_{\Omega_{red}}}}, \\
 - \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_{\mathbf{s}\mu_0\Omega_{red}}} &= \left[(\mu_0 \mathbf{H}_{\mathbf{s}}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A_{\Omega_{red}}}}.
 \end{aligned}$$

Avec cette équation (6.2), la source $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ est calculée seulement sur le domaine Ω_{red} , elle n'a aucune valeur sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_{red}$.

Dans cette section, les pré-résolutions des sources $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}$ (6.1) et $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ (6.2) ont été étudiées sur un domaine réduit Ω_{red} . Dans la prochaine section, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ sera étudiée avec le calcul des termes sources en $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ et en $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}$ sur le domaine réduit Ω_{red} .

6.2 Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétiques transitoires avec les termes sources sur un domaine réduit

Dans le chapitre 3, les équations de la formulation en $\mathbf{A} - V$, sa formulation faible et sa modélisation discrète avec les éléments finis ont été étudiées sur le domaine entier Ω . Dans la section 4.3, les termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$ ont été étudiées sur le domaine entier Ω . Dans cette section, la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ et sa modélisation avec les éléments finis seront étudiées sur le domaine réduit Ω_{red} avec les termes sources \mathbf{A}_j avec des bobines non maillées et \mathbf{H}_j avec des bobines maillées.

6.2.1 Formulations faibles

Le but de cette sous-section est de déterminer la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources calculés sur le domaine réduit Ω_{red} . Alors le seul changement à faire dans la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (3.5) de la sous-section 3.1.1 est de calculer le terme source avec \mathbf{J}_s sur le domaine réduit Ω_{red} au lieu du domaine complet Ω :

Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $V \in H(\mathbf{grad}, \Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{A}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \\ &+ (\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (6.3a)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{grad} V' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} V, V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega), \quad (6.3b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (6.3c)$$

$$V|_{\Gamma_e} = 0, \quad (6.3d)$$

Dans les prochains paragraphes, seulement le terme source $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}$ de (6.3) sera étudié, comme dans la sous-section 4.3.2.

6.2.1.1 \mathbf{H}_j pour des bobines maillées

Le raisonnement de ce paragraphe sera similaire à celui du paragraphe 4.3.2.1.2. Pour des bobines maillées, lorsque la source \mathbf{J}_s est remplacée par le rotationnel du champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j (4.38), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (6.3), $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}$, devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2 :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} = (\mathbf{rot} \mathbf{H}_j, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \quad (6.4a)$$

$$= (\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \quad (6.4b)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j|_{\Gamma_{red}} = \mathbf{H}_{ja}|_{\Gamma_{red}} = \mathbf{0}$ (6.1b) décrite dans la sous-section 6.1.1, le terme $\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})}$ est nul.

D'après l'équation (6.4) et la condition à la limite (6.1b), le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (6.3) peut être remplacé par \mathbf{H}_j pour des bobines maillées :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \quad (6.5)$$

6.2. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE EN MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE AVEC LES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

Dans ce paragraphe, le calcul du terme source en \mathbf{H}_j pour des bobines maillées de la formulation en $\mathbf{A} - V$ a été étudié sur le domaine réduit Ω_{red} . Dans le prochain paragraphe, c'est le calcul du terme source en \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées qui sera étudié sur Ω_{red} .

6.2.1.2 \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées

Le raisonnement de ce paragraphe sera similaire à celui du paragraphe 4.3.2.1.3. Pour des bobines non maillées, lorsque la source \mathbf{J}_s est remplacée par $\text{rot}(\nu_0 \text{rot } \mathbf{A}_j)$ (4.39), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (6.3), $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}$, devient, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, tel que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} &= (\text{rot}(\nu_0 \text{rot } \mathbf{A}_j), \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e}0}^1(\Omega), \\ &= (\nu_0 \text{rot } \mathbf{A}_j, \text{rot } \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} + \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dans la sous-section 6.1.2, la condition à la limite $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A}_j|_{\Gamma_{red}}$ n'est pas imposée fortement lors de la pré-résolution en \mathbf{A}_j , parce qu'elle est imposée faiblement et égale à $\mathbf{n} \times \mu_0 \mathbf{H}_s|_{\Gamma_{red}}$. Le terme surfacique avec la condition à la limite reste donc présent dans l'équation (6.6).

6.2.1.3 Récapitulatif

Finalement, le terme source $(\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}$ sur le domaine réduit Ω_{red} de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (6.3) peut être remplacé par \mathbf{H}_j pour des bobines maillées et par \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées tel que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} &= (\mathbf{H}_j, \text{rot } \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{e}0}^1(\Omega) \\ &= (\nu_0 \text{rot } \mathbf{A}_j, \text{rot } \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} + \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A}_j, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})}. \end{aligned}$$

Dans la prochaine sous-section, ces termes sources seront modélisés avec la méthode des éléments finis afin d'obtenir leur forme matricielle.

6.2.2 Modélisation discrète avec les éléments finis

Le but de cette sous-section est de déterminer la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources calculés sur le domaine réduit Ω_{red} . Alors le seul changement à faire dans la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (3.16) de la sous-section 3.2.1 est de calculer le terme source avec \mathbf{J}_s sur le domaine réduit Ω_{red} au lieu du domaine complet Ω tel que :

$$\begin{pmatrix} \theta R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} + \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{AA} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} & \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{AG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \\ \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{AG}^T \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} & \frac{1}{\Delta t_{(j)}} R_{GG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}^{(j+1)}} \\ \Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}^{(j+1)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{A} \mathbf{J}_s \Omega_{red}} + \mathbf{M}_{\mathbf{A} \mathbf{J}^{(n)}} - \mathbf{M}_{\mathbf{R} \mathbf{H}^{(n)}} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{G} \mathbf{J}^{(n)}} \end{pmatrix}, \quad (6.7a)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}^{(j+1)}} \Big|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (6.7b)$$

$$v_{(j+1)} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \quad (6.7c)$$

où

– $\theta \in [0, 1]$ fixé par le schéma choisi (voir l'annexe B),

$$\begin{aligned}
& - \mathbf{B}^{(n)} = \theta \operatorname{rot} \mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} + (1 - \theta) \operatorname{rot} \mathbf{A}_{(j)}, \\
& - \mathbf{H}^{(n)} = \nu (\mathbf{B}^{(n)}) \left[\theta \left(\operatorname{rot} \mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{B}_{\mathbf{r}(j+1)} \right) + (1 - \theta) \left(\operatorname{rot} \mathbf{A}_{(j)} - \mathbf{B}_{\mathbf{r}(j)} \right) \right], \\
& - \mathbf{E}^{(n)} = -\frac{1}{\Delta t_{(j)}} \left[\mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{A}_{(j)} + \operatorname{grad} v_{(j+1)}^{(n)} - \operatorname{grad} v_{(j)} \right], \\
& - \mathbf{J}_e^{(n)} = -\frac{\sigma (\mathbf{E}^{(n)})}{\Delta t_{(j)}} \left[\mathbf{A}_{(j+1)}^{(n)} - \mathbf{A}_{(j)} + \operatorname{grad} v_{(j+1)}^{(n)} - \operatorname{grad} v_{(j)} \right], \\
& - R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\
& - R_{AA} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\
& - R_{AG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \operatorname{grad} w_{n_i}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}, \\
& - R_{GG} \frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}_e^{(n)}}{\partial \mathbf{E}^{(n)T}} \operatorname{grad} w_{n_i}, \operatorname{grad} w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}, \\
& - \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{a}(j+1)}^{(n)} = \left[\Delta A_{a_k(j+1)}^{(n+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}, \\
& - \Delta \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} = \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n+1)} - \mathbf{v}_{\mathbf{n}(j+1)}^{(n)} = \left[\Delta v_{n_i(j+1)}^{(n+1)} \right]_{1 \leq i \leq n_N}, \\
& - \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_{\mathbf{s}\Omega_{\text{red}}}} = \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}, \\
& - \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}^{(n)}} = \left[(\mathbf{J}_e^{(n)}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
& - \mathbf{M}_{\mathbf{RH}^{(n)}} = \left[(\mathbf{H}^{(n)}, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
& - \mathbf{M}_{\mathbf{GJ}^{(n)}} = \left[(\mathbf{J}_e^{(n)}, \operatorname{grad} w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}.
\end{aligned}$$

Dans les prochains paragraphes, seulement la matrice $\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_{\mathbf{s}\Omega_{\text{red}}}} = \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}$ de (6.7) sera étudié, comme dans la sous-section 4.3.3.

6.2.2.1 \mathbf{H}_j pour des bobines maillées

Le raisonnement de ce paragraphe sera similaire à celui du paragraphe 4.3.3.1.2. La méthode de Galerkin a permis de définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}$. Pour des bobines maillées, lorsque $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ est remplacé par $\operatorname{rot} \mathbf{H}_j$ (6.5), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (6.3), devient, en remplaçant \mathbf{A}' par $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, tel que :

$$(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} = (\mathbf{H}_j, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})}, 1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}. \quad (6.8)$$

En mettant l'équation (6.8) sous forme matricielle, le terme source en $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (6.7) peut être remplacé par \mathbf{H}_j pour des bobines maillées tel que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_{\mathbf{s}\Omega_{\text{red}}}} = \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_j\Omega_{\text{red}}}, \quad (6.9)$$

avec

$$- \mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_{\mathbf{s}\Omega_{\text{red}}}} = \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}},$$

6.2. FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE EN MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE AVEC LES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

$$- \mathbf{M}_{\mathbf{RH}_j\Omega_{red}} = \left[(\mathbf{H}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{red}}}.$$

Dans ce paragraphe, la forme matricielle du terme source en \mathbf{H}_j pour des bobines maillées de la formulation en $\mathbf{A} - V$ a été étudié sur le domaine réduit Ω_{red} . Dans le prochain paragraphe, c'est la forme matricielle du terme source en \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées qui sera étudié sur Ω_{red} .

6.2.2.2 \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées

Le raisonnement de ce paragraphe sera similaire à celui du paragraphe 4.3.3.1.3. La méthode de Galerkin a permis de définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{a_l}$, avec $1 \leq l \leq n_{A\Omega_{red}}$. Pour des bobines non maillées, lorsque \mathbf{J}_s est remplacé par $\mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j)$ (6.6), le terme source de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (6.3), devient, en remplaçant \mathbf{A}' par \mathbf{w}_{a_l} , tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} = (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} + \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{w}_{a_l} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})}, 1 \leq l \leq n_{A\Omega_{red}}. \quad (6.10)$$

Cette équation (6.10) comporte une intégration surfacique d'une condition à la limite. Or il n'est pas possible d'annuler la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j$. C'est pourquoi ce terme surfacique sera remplacé par un terme volumique.

Tout d'abord, les fonctions de forme d'arête \mathbf{w}_{a_l} sont divisées en deux telles que :

$$\mathbf{w}_{a_l} = \mathbf{w}_{\omega_{a_l}}, \quad \forall a_l \in \overset{\circ}{\Omega}_{red}, \quad (6.11)$$

$$= \mathbf{w}_{\gamma_{a_l}}, \quad \forall a_l \in \Gamma_{red}. \quad (6.12)$$

Donc, $\mathbf{w}_{\omega_{a_l}}$ représente la fonction de forme pour les arêtes à l'intérieur du domaine Ω_{red} , mais pas sur le bord Γ_{red} . Alors la trace de $\mathbf{w}_{\omega_{a_l}}$ sur Γ_{red} est nulle. Inversement, $\mathbf{w}_{\gamma_{a_l}}$ représente la fonction de forme seulement pour les arêtes sur le bord du domaine réduit Γ_{red} .

Ensuite avec cette division, le terme source en \mathbf{A}_j (6.10) de la formulation en $\mathbf{A} - V$ devient :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} = (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\omega_{a_l}})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \quad (6.13a)$$

$$+ \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{w}_{\omega_{a_l}} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})} \quad (6.13b)$$

$$+ (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\gamma_{a_l}})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} \quad (6.13c)$$

$$+ \langle \nu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{w}_{\gamma_{a_l}} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{red})}, 1 \leq l \leq n_{A\Omega_{red}}. \quad (6.13d)$$

Le terme d'intégration surfacique (6.13b) est nul, parce que la trace de la fonction de forme $\mathbf{w}_{\omega_{a_l}}$ est nulle sur Γ_{red} , le domaine d'intégration de (6.13b). Les termes avec $\mathbf{w}_{\gamma_{a_l}}$ (6.13c)–(6.13d) sont égaux ensemble à zéro, parce que le domaine des bobines Ω_c est inclus dans le domaine réduit Ω_{red} sans contact avec le bord du domaine et donc le terme $(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\gamma_{a_l}})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}$, dont les termes (6.13c)–(6.13d) sont déduits, est égal à zéro.

Enfin, le terme source en \mathbf{A}_j (6.10) calculé sur le domaine réduit Ω_{red} de la formulation en $\mathbf{A} - V$ est égal à (6.13a) tel que :

$$(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{a_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})} = (\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\omega_{a_l}})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{red})}, 1 \leq l \leq n_{A\Omega_{red}}. \quad (6.14)$$

En mettant l'équation (6.14) sous forme matricielle, le terme source en \mathbf{J}_s de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (6.7) peut être remplacé par \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées tel que :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{AJ}_s\Omega_{red}} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\Omega_{red} \mathbf{rot} \mathbf{A}_j \nu_0 \Omega_{red}}, \quad (6.15)$$

avec

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\Omega_{\text{red}}} &= \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}, \\
 - \mathbf{M}_{\mathbf{R}_{\Omega_{\text{red}}} \text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{j}} \nu_0 \Omega_{\text{red}}} &= \left[(\nu_0 \text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{j}}, \text{rot} \mathbf{w}_{\omega_{\mathbf{a}_1}})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}.
 \end{aligned}$$

Or la formulation en $\mathbf{A} - V$ (6.7) avec le terme source en $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ (6.15) calculé sur le domaine réduit Ω_{red} n'est plus compatible (voir la définition dans la sous-section 3.3.2), parce que la densité de courant source $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ est remplacé par le rotationnel de $\nu_0 \text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ mais $\nu_0 \text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ est projeté sur le rotationnel de $\mathbf{w}_{\omega_{\mathbf{a}_1}}$ au lieu du rotationnel de $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_1}$. Donc la formulation en $\mathbf{A} - V$ (6.7) avec $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ (6.15) nécessite une condition de jauge pour être résolue, définie par exemple par un arbre d'arêtes. Cependant les fonctions de forme $\mathbf{w}_{\gamma_{\mathbf{a}_1}}$, manquantes à la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ calculé sur Ω_{red} , sont définies seulement sur Γ_{red} . Alors pour des problèmes avec un petit nombre d'arêtes sur Γ_{red} comparé au nombre total d'arêtes dans Ω_{red} , la formulation en $\mathbf{A} - V$ (6.7) avec $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ (6.15) converge avec un solveur itératif sans arbre d'arêtes, même si le système n'est pas compatible.

6.2.2.3 Récapitulatif

Finalement, le terme source $\mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\Omega_{\text{red}}} = \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}$ de la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (6.7) peut être remplacé par $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}$ pour des bobines maillées et par $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ pour des bobines non maillées tel que :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_{\mathbf{s}}\Omega_{\text{red}}} &= \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}_{\mathbf{j}}\Omega_{\text{red}}} = \left[(\mathbf{H}_{\mathbf{j}}, \text{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_1})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}, \\
 &= \mathbf{M}_{\mathbf{R}_{\Omega_{\text{red}}} \text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{j}} \nu_0 \Omega_{\text{red}}} = \left[(\nu_0 \text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{j}}, \text{rot} \mathbf{w}_{\omega_{\mathbf{a}_1}})_{\mathbf{L}^2(\Omega_{\text{red}})} \right]_{1 \leq l \leq n_{A\Omega_{\text{red}}}}.
 \end{aligned}$$

Dans les sections précédentes 6.1 et 6.2, les termes sources en $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}$ avec des bobines maillées et en $\mathbf{A}_{\mathbf{j}}$ avec des bobines non maillées pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ ont été calculés sur un domaine réduit Ω_{red} comprenant les bobines et étant fixe ou mobile mais pas les deux.

Dans la prochaine section, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources calculés sur Ω_{red} sera validée et testée afin de montrer son équivalence à la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources calculés sur le domaine complet Ω .

6.3 Validations et résultats des termes sources sur un domaine réduit

Dans cette section, trois cas tests seront étudiés pour valider le calcul des termes sources sur un domaine réduit, étudié dans les sections 6.1 et 6.2.

La première validation est faite sur un cas test simple, un tore avec une bobine maillée ou non maillée au-dessus, étudié en magnétoharmonique. Ce tore permettra de valider dans un cas simple le calcul des termes sources pour des bobines maillées et non maillées sur un domaine réduit Ω_{red} .

La deuxième validation est faite sur un cas test réel présenté dans la section 5.2, une machine asynchrone avec des bobines non maillées en magnétoharmonique. Cette machine permettra de valider dans un cas réel le calcul des termes sources pour des bobines non maillées sur Ω_{red} .

La troisième validation est aussi faite sur un cas test réel, le problème 24 du T.E.A.M. Workshop présenté dans la section 5.3, une machine avec des bobines maillées en magnétique transitoire. Ce problème permettra de valider dans un cas réel le calcul des termes sources pour des bobines maillées sur Ω_{red} .

6.3.1 Tore en magnétoharmonique

Le cas du tore, dont l'étude est présentée dans cette sous-section, a été décrit avec une bobine non maillée dans l'article [Ferrouillat *et al.*, 2016].

6.3.1.1 Description du problème

Le dispositif étudié dans cette sous-section est composé d'un tore en aluminium avec une bobine au-dessus. Il est étudié en magnétoharmonique. La bobine est soit maillée, soit non-maillée. La différence entre les bobines maillées et non maillées a été expliquée dans la section 4.1.

Les termes sources du tore, en \mathbf{H}_j pour des bobines maillées et en \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées, sont calculés à l'aide du gradient conjugué ICCG. La formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue est celle de l'équation (6.7), décrite dans la sous-section 6.2.2, en remplaçant le terme source par \mathbf{H}_j (6.9) pour les bobines maillées et par \mathbf{A}_j (6.15) pour les bobines non maillées. Elle est résolue soit avec le gradient conjugué ICCG, soit avec le solveur direct MUMPS. Le solveur MUMPS est toujours utilisé avec un arbre d'arêtes, comme expliqué dans la section 3.3. En revanche, le solveur ICCG est utilisé sans arbre d'arêtes dans la plupart des cas. Le cas où le solveur ICCG est utilisé avec un arbre d'arêtes est celui de la source \mathbf{A}_j calculé sur le domaine réduit Ω_{red} pour des bobines non maillées.

Sur le tore, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} , les pertes par effet Joule et les temps de calcul des pré-résolutions et des résolutions seront étudiés pour le calcul des termes sources \mathbf{H}_j avec une bobine maillée et \mathbf{A}_j avec une bobine non maillée sur le domaine complet Ω et sur le domaine réduit Ω_{red} pour la formulation en $\mathbf{A} - V$. Ce cas test du tore permettra de valider le calcul des termes sources sur le domaine réduit Ω_{red} .

6.3.1.1.1 Géométrie

La géométrie du cas du tore est décrite sur la figure 6.2a avec une bobine maillée et sur la figure 6.2b avec une bobine non maillée.

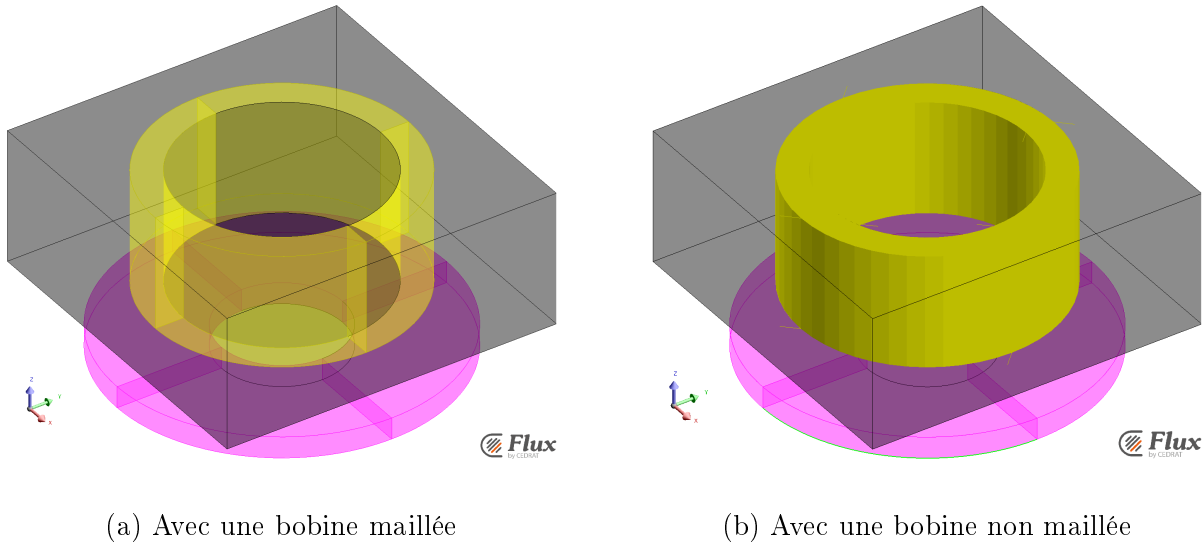


FIGURE 6.2 – Géométrie du tore

Ce dispositif est composé d'un tore en aluminium, d'une bobine au-dessus, et le tout entouré d'air. Dans la bobine, il circule un courant de 2,742 A par tour. Elle est maillée ou non maillée. Ces différentes régions du dispositif sont détaillées dans le tableau 6.1.

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Couleur sur la figure 6.2	Domaine
Air	μ_0	0		$\Omega \setminus \Omega_{red}$
Tore	μ_0	$3,256 * 10^7 \text{ S.m}^{-1}$	Rose	$\Omega \setminus \Omega_{red}$
Cage d'air	μ_0	0	Noir	Ω_{red}
Bobine	μ_0	-	Jaune	Ω_{red}

TABEAU 6.1 – Détails des régions du tore

Le domaine réduit Ω_{red} est composé de la cage d'air et de la bobine (respectivement en noire et en jaune sur la figure 6.2), vu que le domaine des bobines doit être compris dans Ω_{red} . Alors que le domaine $\Omega \setminus \Omega_{red}$ est composé de l'air restant et du tore (respectivement en turquoise et en rose sur la figure 6.2).

6.3.1.1.2 Maillage

Les maillages du tore sont représentés sur la figure 6.3. Avec une bobine maillée, le maillage de la figure 6.3a est composé de 414 420 nœuds et 309 725 éléments. Avec une bobine non maillée, il est composé de 408 850 nœuds et 305 701 éléments sur la figure 6.3b. Les maillages des figures 6.3a et 6.3b sont similaires : les tailles des éléments sont les mêmes et les différences du nombre de nœuds et d'éléments proviennent du maillage des bobines. Le maillage du cas du tore est du deuxième ordre et il est constitué de tétraèdres.

Dans ce paragraphe, la géométrie et le maillage du cas du tore ont été détaillés. Dans le prochain paragraphe, les isovaleurs de \mathbf{B} , les pertes Joule et les temps de résolution seront étudiés sur ce tore avec une bobine maillée ou non avec le calcul des termes sources sur les domaines complet Ω ou réduit Ω_{red} .

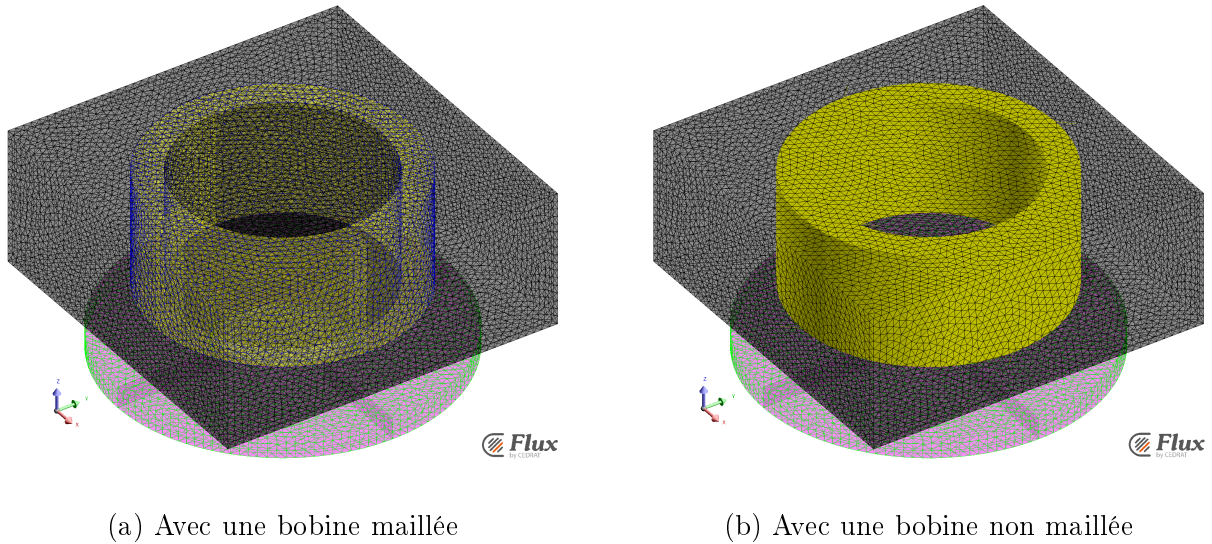


FIGURE 6.3 – Maillage du tore

6.3.1.2 Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}

Les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ sont représentées sur la figure 6.4 pour le tore en aluminium. Pour des bobines maillées, le terme source de la formulation en $\mathbf{A} - V$ est \mathbf{H}_j , la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Le terme source \mathbf{H}_j est calculé sur le domaine réduit Ω_{red} sur les figures 6.4a et 6.4b et sur le domaine complet Ω sur les figures 6.4c et 6.4d avec un solveur itératif ou direct. Alors que pour des bobines non maillées, le terme source est \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, et il est calculé sur Ω_{red} sur les figures 6.4e et 6.4f et sur Ω sur les figures 6.4g et 6.4h avec un solveur itératif ou direct. Sur les figures 6.4a, 6.4c et 6.4g, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur itératif ICCG sans arbre d'arêtes avec les termes sources \mathbf{A}_j ou \mathbf{H}_j calculés sur Ω_{red} ou Ω . Sur la figure 6.4e, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{A}_j est aussi résolue avec ICCG mais avec un arbre d'arêtes, parce que le système n'est plus compatible. Sur les figures 6.4b, 6.4d, 6.4f et 6.4h, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur direct MUMPS avec un arbre d'arêtes avec les termes sources \mathbf{A}_j ou \mathbf{H}_j calculés sur Ω_{red} ou Ω .

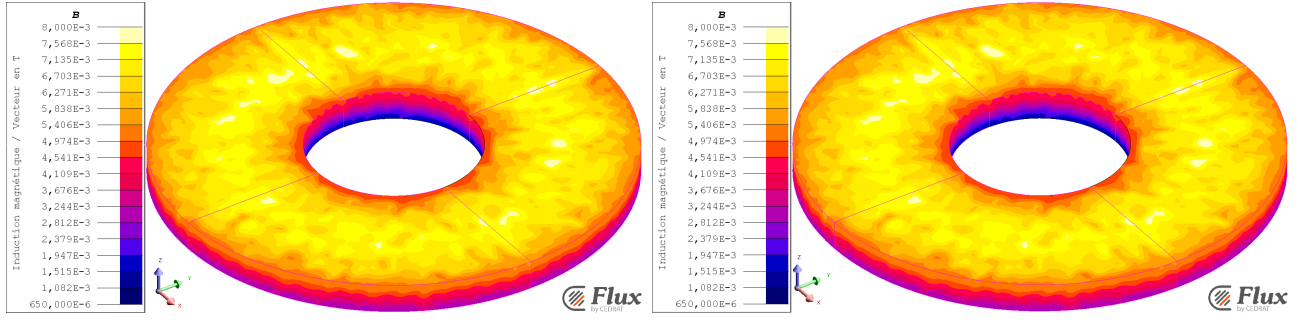
Les figures 6.4a, 6.4b, 6.4c et 6.4d sont respectivement similaires aux figures 6.4e, 6.4f, 6.4g et 6.4h. Donc comme dans les sections 5.1 et 5.3, les isovaleurs de \mathbf{B} sont identiques avec le terme source \mathbf{H}_j pour des bobines maillées qu'avec le terme source \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées.

De plus, les figures de gauche 6.4a, 6.4c, 6.4e et 6.4g où la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec ICCG sont respectivement identiques aux figures de droite 6.4b, 6.4d, 6.4f et 6.4h où elle est résolue avec MUMPS. Donc comme dans la section 5.2, les isovaleurs de \mathbf{B} ne dépendent pas du solveur pour résoudre la formulation en $\mathbf{A} - V$.

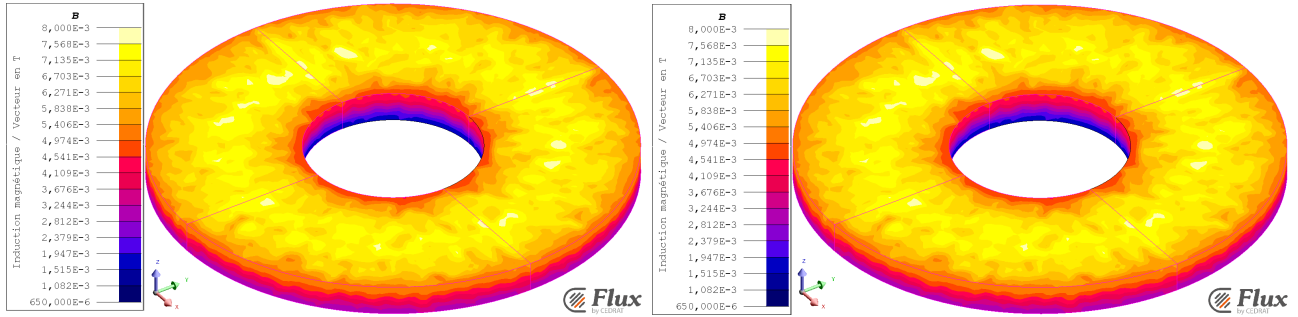
En outre, lorsque les termes sources \mathbf{H}_j des bobines maillées ou \mathbf{A}_j des bobines non maillées sont calculés sur le domaine réduit Ω_{red} des figures 6.4a, 6.4b, 6.4e et 6.4f, les isovaleurs de \mathbf{B} sont respectivement identiques à celles des termes sources calculés sur le domaine complet Ω des figures 6.4c, 6.4d, 6.4g et 6.4h.

Finalement, le calcul des termes sources de la formulation en $\mathbf{A} - V$ peut être effectué sur le domaine réduit Ω_{red} en obtenant les mêmes isovaleurs de \mathbf{B} que sur le domaine complet Ω . Dans le prochain paragraphe, ce sera les pertes Joule qui seront comparées.

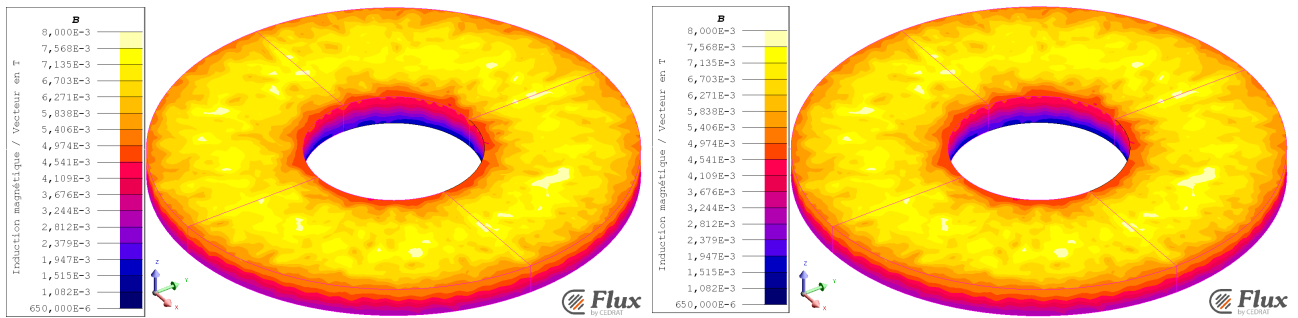
CHAPITRE 6. TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT DES FORMULATIONS EN POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE



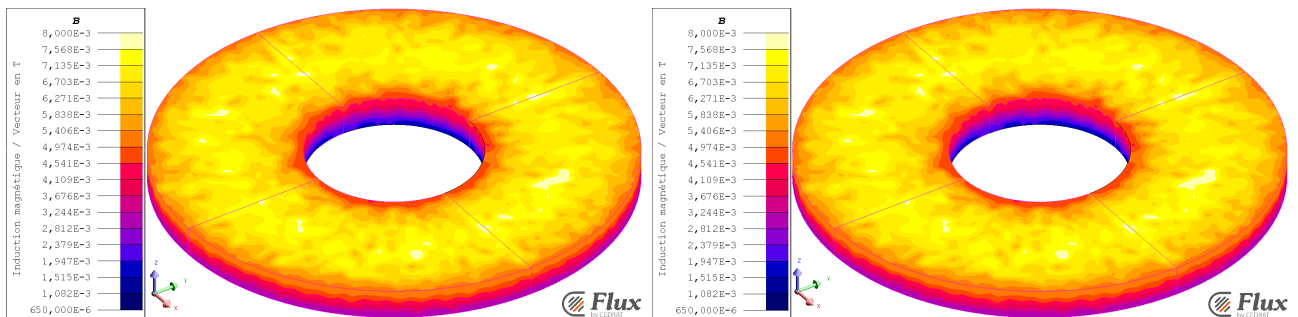
(a) \mathbf{H}_j pour des bobines maillées calculée sur Ω_{red} et $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG sans arbre d'arêtes (b) \mathbf{H}_j pour des bobines maillées calculée sur Ω_{red} et $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS et un arbre d'arêtes



(c) \mathbf{H}_j pour des bobines maillées calculée sur Ω et $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG sans arbre d'arêtes (d) \mathbf{H}_j pour des bobines maillées calculée sur Ω et $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS et un arbre d'arêtes



(e) \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées calculée sur Ω_{red} et $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG et un arbre d'arêtes (f) \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées calculée sur Ω_{red} et $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS et un arbre d'arêtes



(g) \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées calculée sur Ω et $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG sans arbre d'arêtes (h) \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées calculée sur Ω et $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS et un arbre d'arêtes

FIGURE 6.4 – Isovaleurs de \mathbf{B} du tore

6.3.1.3 Pertes Joule

Les pertes par effet Joule du tore en aluminium sont données dans le tableau 6.2 pour le calcul des termes sources avec une bobine maillée ou non sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} de la formulation en $\mathbf{A} - V$, résolue avec le solveur itératif ICCG ou avec le solveur direct MUMPS. Avec une bobine maillée, le terme source est \mathbf{H}_j calculé par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, alors qu'avec une bobine non maillée, le terme source est \mathbf{A}_j calculé par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Alors, les pertes par effet Joule du tore sont au minimum de 3,675 W et au maximum de 3,691 W . Alors l'écart relatif pour les pertes Joule est de 0,418 %.

Bobine	Sources	Domaine	Solveur	Arbre	Pertes Joule (en W)
Maillée	$\mathbf{H_j}$	Ω_{red}	ICCG	Non	3,689
			MUMPS	Oui	3,689
		Ω	ICCG	Non	3,675
			MUMPS	Oui	3,675
Non maillée	$\mathbf{A_j}$	Ω_{red}	ICCG	Oui	3,691
			MUMPS	Oui	3,691
		Ω	ICCG	Non	3,677
			MUMPS	Oui	3,677
Ecart relatif					0,418 %

TABLEAU 6.2 – Pertes par effet Joule du tore

Finalement, les résultats des isovaleurs de \mathbf{B} et des pertes par effet Joule sont similaires pour le calcul des termes sources sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} avec une bobine maillée ou non. Dans le prochain paragraphe, les temps de calcul des solveurs ICCG et MUMPS seront étudiés afin de vérifier que le calcul des termes sources sur un domaine réduit Ω_{red} se fait dans un temps équivalent à celui des termes sources calculés sur un domaine complet Ω .

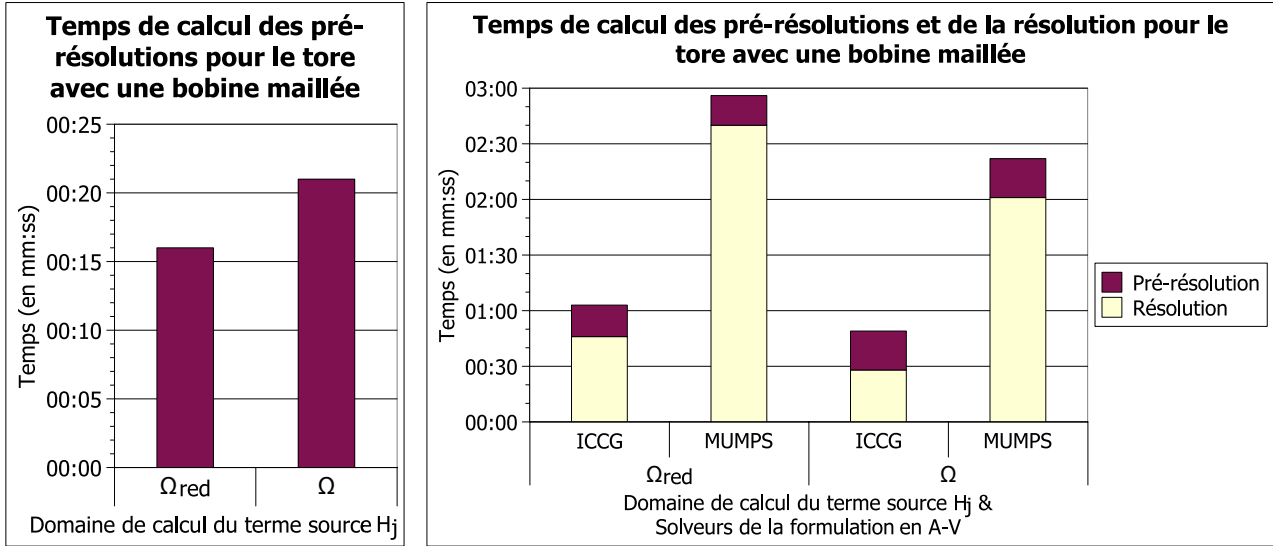
6.3.1.4 Temps de calcul

6.3.1.4.1 \mathbf{H}_j pour la bobine maillée

Les temps de calcul de la pré-résolution en \mathbf{H}_j sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} avec le solveur ICCG et de la résolution en $\mathbf{A} - V$ avec les solveurs ICCG et MUMPS sont donnés sur la figure 6.5b pour le tore avec une bobine maillée. Le détail des temps de pré-résolutions est donné sur la figure 6.5a. Lorsque la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur itératif ICCG, aucun arbre d'arêtes n'est utilisé. Alors que lorsque la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur direct MUMPS, un arbre d'arêtes est utilisé comme condition de jauge.

Sur la figure 6.5a, la pré-résolution du terme source \mathbf{H}_j calculé sur Ω en 21 secondes est plus lent que celle sur Ω_{red} en 16 secondes, parce que le domaine Ω_{red} est plus petit que le domaine Ω .

Sans la pré-résolution en \mathbf{H}_j pour la bobine maillée, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ sur la figure 6.5b est du plus lent au plus rapide pour : la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS avec \mathbf{H}_j calculé sur Ω_{red} (2 minutes et 40 secondes), $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS avec \mathbf{H}_j calculé sur Ω (2 minutes), $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG avec \mathbf{H}_j calculé sur Ω_{red} (45 secondes), $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG avec \mathbf{H}_j calculé sur Ω (30 secondes). Donc sur ce petit



(a) Pré-résolutions

(b) Pré-résolutions & Résolution

FIGURE 6.5 – Temps de calcul pour le tore avec une bobine maillée

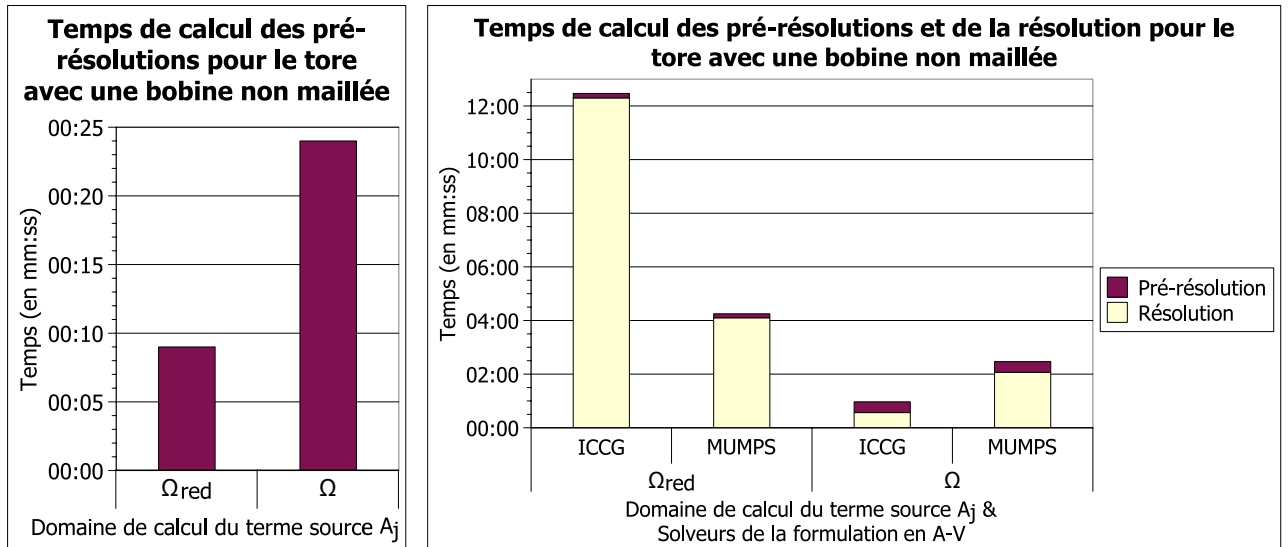
problème, le solveur itératif ICCG résout les problèmes plus vite que le solveur direct MUMPS. De plus, il est un peu plus rapide de résoudre la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j calculé sur le domaine complet Ω qu'avec \mathbf{H}_j calculé sur le domaine réduit Ω_{red} , mais les temps de résolution restent du même ordre de grandeur.

6.3.1.4.2 \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées

Les temps de calcul de la pré-résolution en \mathbf{A}_j sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} avec le solveur ICCG et de la résolution en $\mathbf{A} - V$ avec les solveurs ICCG et MUMPS sont donnés sur la figure 6.6b pour le tore avec une bobine non maillée. Le détail des temps de pré-résolutions est donné sur la figure 6.6a. Lorsque la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur direct MUMPS, un arbre d'arêtes est utilisé comme condition de jauge. Alors que lorsque la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur itératif ICCG, un arbre d'arêtes est utilisé avec le terme source \mathbf{A}_j calculé sur Ω_{red} car le système n'est plus compatible et aucun arbre d'arêtes avec le terme source \mathbf{A}_j calculé sur Ω .

Sur la figure 6.6a, la pré-résolution du terme source \mathbf{A}_j calculé sur Ω en 24 secondes est plus lente que celle calculée sur Ω_{red} en 9 secondes, parce que le domaine Ω_{red} est plus petit que le domaine Ω .

Sans la pré-résolution en \mathbf{A}_j pour la bobine non maillée, la résolution de la formulation en $\mathbf{A} - V$ sur la figure 6.6b est du plus lent au plus rapide pour : la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG avec \mathbf{A}_j calculé sur Ω_{red} (12 minutes et 20 secondes), $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS avec \mathbf{A}_j calculé sur Ω_{red} (4 minutes et 5 secondes), $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS avec \mathbf{A}_j calculé sur Ω (2 minutes et 5 secondes), $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG avec \mathbf{A}_j calculé sur Ω (35 secondes). L'utilisation du solveur itératif ICCG avec un arbre d'arêtes dans le cas du calcul d' \mathbf{A}_j sur Ω_{red} augmente énormément les temps de calcul. Dans un contexte industriel, il n'est donc pas réalisable de résoudre un problème avec ICCG et un arbre d'arêtes. Alors en comparant les temps de résolution avec le solveur MUMPS, le calcul du terme source sur le domaine réduit Ω_{red} est deux fois plus lent que sur le domaine complet Ω .



(a) Pré-résolutions

(b) Pré-résolutions & Résolution

FIGURE 6.6 – Temps de calcul pour le tore avec une bobine maillée

6.3.1.5 Récapitulatif

Finalement que les termes sources soient calculés sur le domaine entier Ω ou sur un domaine réduit Ω_{red} ne change pas les résultats sur les isovaleurs de \mathbf{B} et les pertes Joule du tore. Au niveau des temps de calcul pour ce petit problème, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue plus rapidement si les termes sources sont calculés sur Ω que sur Ω_{red} : les temps de calcul restent équivalents avec le terme source \mathbf{H}_j pour des bobines maillées, mais ils sont deux fois plus importants avec le terme source \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées.

Dans cette sous-section, le cas test est un cas d'étude. Dans la prochaine sous-section, le calcul des termes sources pour des bobines non maillées sur un domaine réduit Ω_{red} sera testé sur un cas réel, une machine asynchrone.

6.3.2 Machine asynchrone en magnétoharmonique

L'étude de la machine asynchrone, présentée dans cette sous-section, a été décrite dans l'article [Ferrouillat *et al.*, 2016].

6.3.2.1 Description du problème

La machine asynchrone avec des bobines non maillées étudiée dans cette sous-section est la même que celle de la section 5.2. Elle est étudiée en trois dimensions et en régime harmonique à 50 Hz. La géométrie et le maillage de cette machine sont respectivement représentés sur les figures 5.7 et 5.8 de la sous-section 5.2.1.

Le domaine réduit Ω_{red} doit contenir les bobines, il est donc composé de toutes les bobines non maillées et des régions entourant les bobines, l'air, le stator et l'anneau de protection. Alors que le domaine $\Omega \setminus \Omega_{red}$ est composé des régions restantes, le rotor et la cage d'écureuil. Les régions de la machine asynchrone et leurs domaines d'appartenance, réduit ou non, sont donnés dans le tableau 6.3.

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Sur la figure 5.7	Domaine
Rotor	$5000 \mu_0$	0	Bleu	$\Omega \setminus \Omega_{red}$
Cage d'écureuil	μ_0	$3,21 * 10^7 S.m^{-1}$	Noir	$\Omega \setminus \Omega_{red}$
Air	μ_0	0	Turquoise	Ω_{red}
Stator	$5000 \mu_0$	0	Rose	Ω_{red}
Anneau de protection	$1,04 \mu_0$	$1,45 * 10^6 S.m^{-1}$	Jaune	Ω_{red}
Bobine 1	μ_0	-	Rouge	Ω_{red}
Bobine 2	μ_0	-	Vert	Ω_{red}
Bobine 3	μ_0	-	Bleu	Ω_{red}

TABLEAU 6.3 – Détails des régions de la machine asynchrone

Les termes sources de la machine asynchrone seront calculés avec le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j (6.2), la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, à l'aide du gradient conjugué ICCG sur un domaine complet Ω ou sur le domaine réduit Ω_{red} . La formulation en $\mathbf{A} - V$ (6.7) en remplaçant le terme source en \mathbf{J}_s par \mathbf{A}_j (6.15) sera résolue soit avec le gradient conjugué ICCG sans arbre d'arêtes, soit avec le solveur direct MUMPS avec un arbre d'arêtes.

Sur cette machine, les isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} , le couple, les pertes par effet Joule et les temps de calcul seront étudiés pour le calcul du terme source \mathbf{A}_j sur le domaine réduit Ω_{red} ou non Ω pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées. Ce problème permet de vérifier sur un cas réel que pour des bobines non maillées, le calcul des termes sources sur un domaine réduit donne des bons résultats en un temps correct par rapport au calcul des termes sources sur le domaine complet. Il permet aussi de comparer les solveurs itératifs et directs avec et sans arbre d'arêtes.

6.3.2.2 Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B}

Sur la figure 6.7, les isovaleurs de \mathbf{B} sont représentées sur le plan xy à $z = 0$ pour deux encoches du stator de la machine asynchrone pour le calcul du terme source \mathbf{A}_j sur le domaine complet Ω et sur le domaine réduit Ω_{red} de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines non maillées. Sur les figures 6.7a et 6.7c, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur itératif ICCG sans arbre d'arêtes. Tandis que sur les figures 6.7b et 6.7d, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est résolue avec le solveur direct MUMPS et un arbre d'arêtes. De plus sur les figures 6.7a et 6.7b, la source \mathbf{A}_j est calculée sur le domaine complet Ω . Alors que sur les figures 6.7c et 6.7d, \mathbf{A}_j est calculée sur le domaine réduit Ω_{red} .

En comparant les figures de gauche 6.7a et 6.7c pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG avec respectivement les figures de droite 6.7b et 6.7d pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec MUMPS, les isovaleurs de \mathbf{B} sont similaires.

Le calcul du terme source \mathbf{A}_j sur le domaine complet Ω ou sur le domaine réduit Ω_{red} n'influe pas sur les isovaleurs de \mathbf{B} : pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ résolue avec ICCG et MUMPS, les figures 6.7a et 6.7b avec \mathbf{A}_j calculée sur Ω sont respectivement identiques aux figures 6.7c et 6.7d avec \mathbf{A}_j calculée sur Ω_{red} .

Dans ce paragraphe, les résultats sur les isovaleurs de \mathbf{B} sont identiques que le calcul des termes sources soit fait sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} et que la formulation en $\mathbf{A} - V$ soit résolue avec le solveur itératif ICCG ou le solveur direct MUMPS. Dans le prochain paragraphe, la même étude sera faite sur d'autres résultats, le couple et les pertes par effet Joule.

6.3. VALIDATIONS ET RÉSULTATS DES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

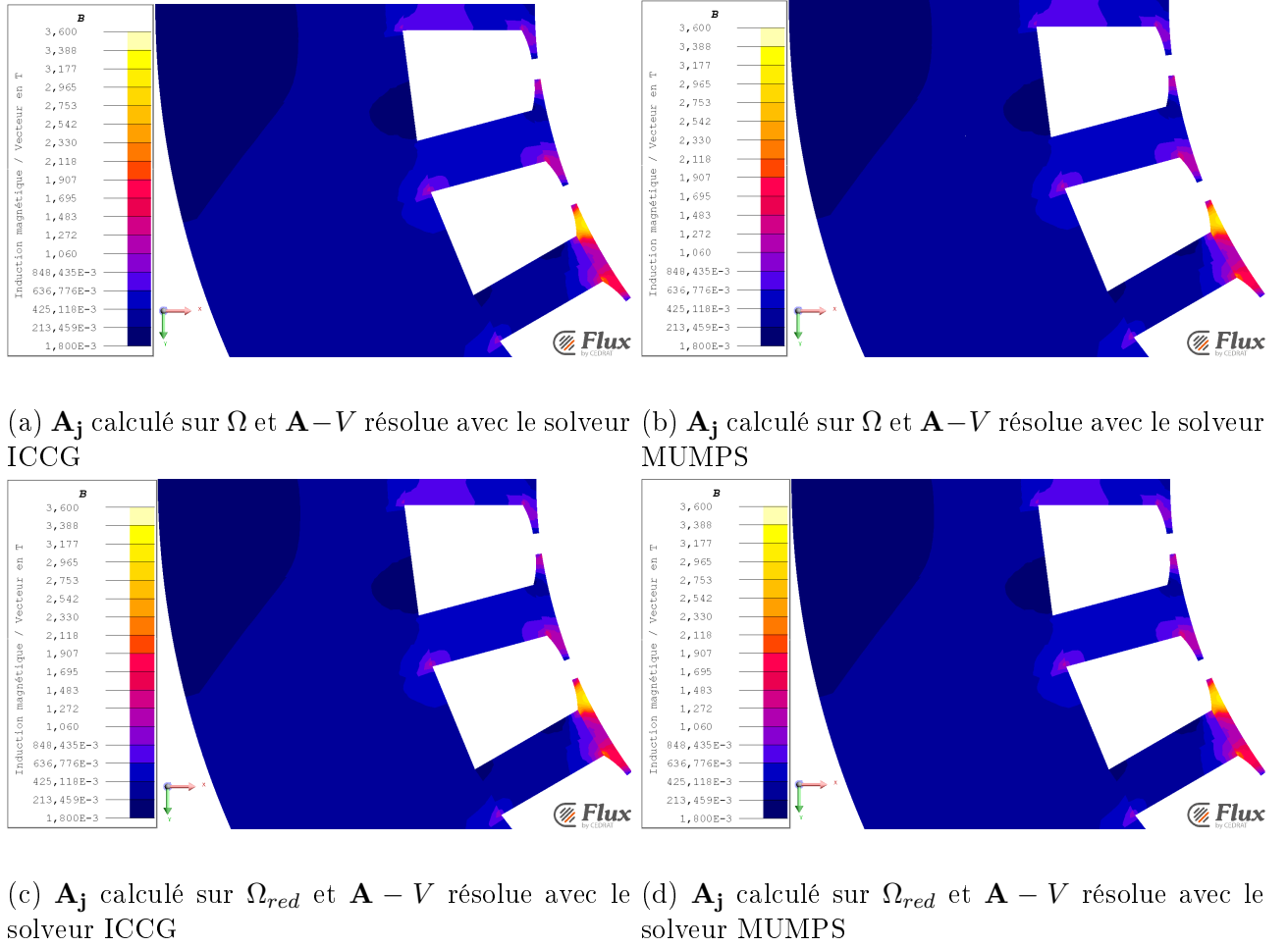


FIGURE 6.7 – Isovaleurs de \mathbf{B} pour la machine asynchrone

6.3.2.3 Couple et pertes Joule

Le couple de la machine asynchrone est calculé sur les régions rotor et cage d'écureuil, i.e. dans le domaine $\Omega \setminus \Omega_{red}$. Il vaut $2,097 \text{ N/m}$ que le terme source \mathbf{A}_j soit calculé sur le domaine complet Ω ou sur le domaine réduit Ω_{red} et que la formulation en $\mathbf{A}-V$ soit résolue avec ICCG sans arbre d'arêtes ou avec MUMPS et un arbre d'arêtes.

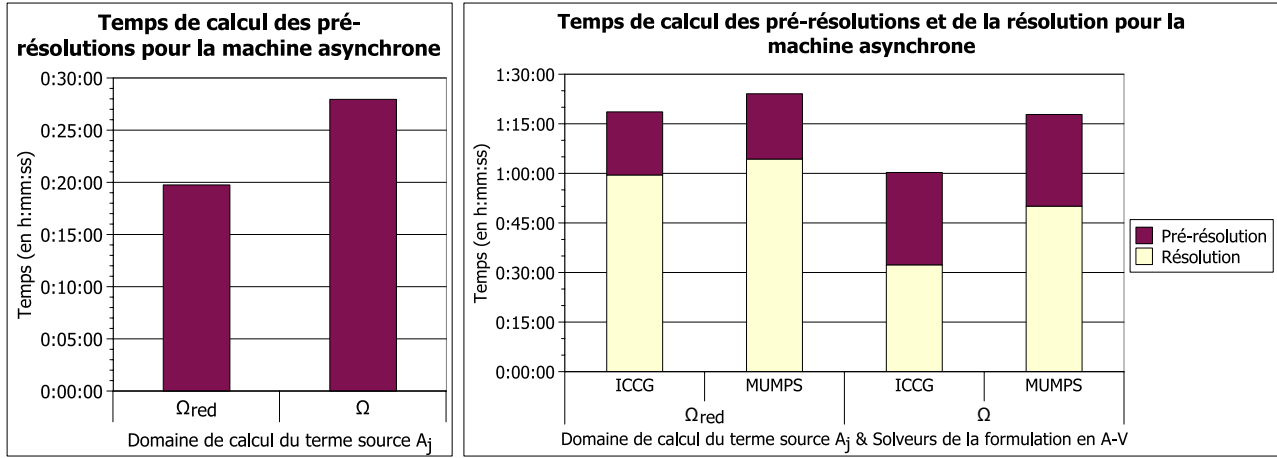
Les pertes par effet Joule de l'anneau de protection valent $1,777 \text{ W}$ qu' \mathbf{A}_j soit calculé sur Ω ou Ω_{red} et qu' $\mathbf{A}-V$ soit résolue avec ICCG ou avec MUMPS. De la même façon, les pertes par effet Joule de la cage d'écureuil ne varient ni suivant le domaine de calcul d' \mathbf{A}_j , ni suivant le solveur pour résoudre la formulation en $\mathbf{A}-V$ et elles valent $685,7 \text{ W}$.

Finalement, les résultats des isovaleurs de \mathbf{B} , du couple et des pertes par effet Joule sont similaires que le calcul des termes sources soit fait sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} . Dans le prochain paragraphe, les temps de calcul des solveurs ICCG et MUMPS seront étudiés afin de vérifier que le calcul des termes sources Ω_{red} se fait dans un temps équivalent à celui des termes sources calculés sur Ω pour des bobines non maillées.

6.3.2.4 Temps de calcul du solveur

Les temps de calcul des pré-résolutions avec le solveur ICCG et de la résolution de la formulation en $\mathbf{A}-V$ avec les solveurs ICCG et MUMPS sont donnés sur la figure 6.8b pour la

machine asynchrone avec le calcul des termes sources des bobines non maillées sur le domaine réduit Ω_{red} ou sur le domaine complet Ω . Le détail des temps de pré-résolutions est donné sur la figure 6.8a.



(a) Pré-résolutions

(b) Pré-résolutions & Résolution

FIGURE 6.8 – Temps de calcul pour la machine asynchrone

Le calcul des termes sources en A_j est toujours fait avec le solveur ICCG. Sur la figure 6.8a, la source A_j sur le domaine entier Ω est résolue en 28 minutes, alors que sur le domaine réduit Ω_{red} , A_j est résolue en 20 minutes, parce que le maillage Ω_h possède plus d'arêtes que le maillage Ω_{red_h} .

Sans la pré-résolution en A_j , la résolution de la formulation en $A - V$ avec ICCG dure 33 minutes lorsque le terme source en A_j est calculé sur Ω et 1 heure lorsque le terme source en A_j est calculé sur Ω_{red} . La résolution de la formulation en $A - V$ avec MUMPS dure 50 minutes lorsque le terme source en A_j est calculé sur Ω et 1 heure et 5 minutes lorsque le terme source en A_j est calculé sur Ω_{red} . Donc, la formulation en $A - V$ est résolue plus rapidement avec le terme source en A_j calculé sur le domaine complet Ω que sur le domaine réduit Ω_{red} . De plus, le solveur MUMPS résout plus lentement que le solveur ICCG. Mais sur le domaine réduit Ω_{red} , les temps de résolution des deux solveurs sont équivalents.

6.3.2.5 Récapitulatif

Finalement, les résultats sur les isovaleurs de B , le couple et les pertes Joule sont identiques que le calcul des termes sources soit fait sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} et que la formulation en $A - V$ soit résolue avec le solveur itératif ICCG ou le solveur direct MUMPS. De plus, la formulation en $A - V$ avec des bobines non maillées est résolue un peu plus rapidement lorsque le terme source en A_j est calculé sur le domaine complet Ω (en 1 heure avec ICCG et en 1 heure et 20 minutes avec MUMPS) que lorsqu'il est calculé sur le domaine réduit Ω_{red} (en 1 heure et 20 minutes avec ICCG et en 1 heure et 25 minutes avec MUMPS), mais en un temps similaire.

Dans la prochaine sous-section, l'équivalence du calcul des termes sources sur le domaine réduit Ω_{red} et le domaine complet Ω sera testé sur un cas réel avec des bobines maillées, le problème 24 du T.E.A.M. Workshop.

6.3.3 Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire

6.3.3.1 Description du problème

Le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines maillées étudié dans cette sous-section est le même que celui de la section 5.3. C'est une machine avec un rotor bloqué à 22° par rapport à l'axe y et étudiée en trois dimensions en régime transitoire avec le courant des bobines variant en fonction du temps, représenté sur la figure 5.12a de la sous-section 5.3.1. Les périodes de temps étudiées varient de 0 à 0,3 secondes avec des pas de temps tous les 0,005 secondes. Dans les derniers pas de temps, le régime transitoire devient permanent. La géométrie et le maillage du problème 24 sont respectivement représentés sur les figures 5.11b et 5.13b de la sous-section 5.3.1.

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Couleur sur la figure 5.11b	Domaine
Rotor	Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 5.12b	$4,54 * 10^6 \text{ S.m}^{-1}$	Rouge	$\Omega \setminus \Omega_{red}$
Axe	μ_0	$1,4 * 10^7 \text{ S.m}^{-1}$	Rose	$\Omega \setminus \Omega_{red}$
Air	μ_0	0	Turquoise	Ω_{red}
Stator	Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 5.12b	$4,54 * 10^6 \text{ S.m}^{-1}$	Bleu	Ω_{red}
Bobine	μ_0	-	Jaune	Ω_{red}

TABLEAU 6.4 – Détails des régions du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Le domaine réduit Ω_{red} doit contenir les bobines, il est donc composé des bobines maillées et des régions entourant les bobines, l'air et le stator. Alors que le domaine $\Omega \setminus \Omega_{red}$ est composé des régions restantes, le rotor et l'axe. Les régions du problème 24 et leurs domaines d'appartenance, réduit ou non, sont donnés dans le tableau 6.4.

Les termes sources du problème 24 sont calculés avec le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j (6.1), la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, à l'aide du gradient conjugué ICCG sur un domaine complet Ω ou un domaine réduit Ω_{red} . La formulation en $\mathbf{A} - V$ (6.7) en remplaçant le terme source en \mathbf{J}_s par \mathbf{H}_j (6.9) sera résolue avec le gradient conjugué ICCG sans arbre d'arêtes.

Sur cette machine, les grandeurs étudiées seront le couple, le flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor, le flux dans les bobines et l'induction magnétique \mathbf{B} en un point dans l'air entre les pôles magnétiques du rotor et du stator pour le calcul du terme source \mathbf{H}_j sur le domaine réduit Ω_{red} ou non Ω pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines maillées. Ce problème permet de vérifier sur un cas réel que pour des bobines maillées, le calcul des termes sources sur un domaine réduit donne des bons résultats en un temps similaire que sur le domaine complet. De plus dans les prochaines figures représentant ces résultats, les triangles violets représenteront la formulation en $\mathbf{T} - \phi$, décrite dans [Le Floch, 2002] ; et les carrés bleus et verts la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j respectivement calculé sur le domaine complet Ω et le domaine réduit Ω_{red} , décrits dans la section 6.2.

6.3.3.2 Couple

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines maillées, le couple du rotor en fonction du temps est représenté sur la figure 6.9 pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$. Sur cette figure, le couple est identique pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ que le terme source \mathbf{H}_j

soit calculé sur le domaine complet Ω ou sur le domaine réduit Ω_{red} . De plus, le couple est similaire pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$.

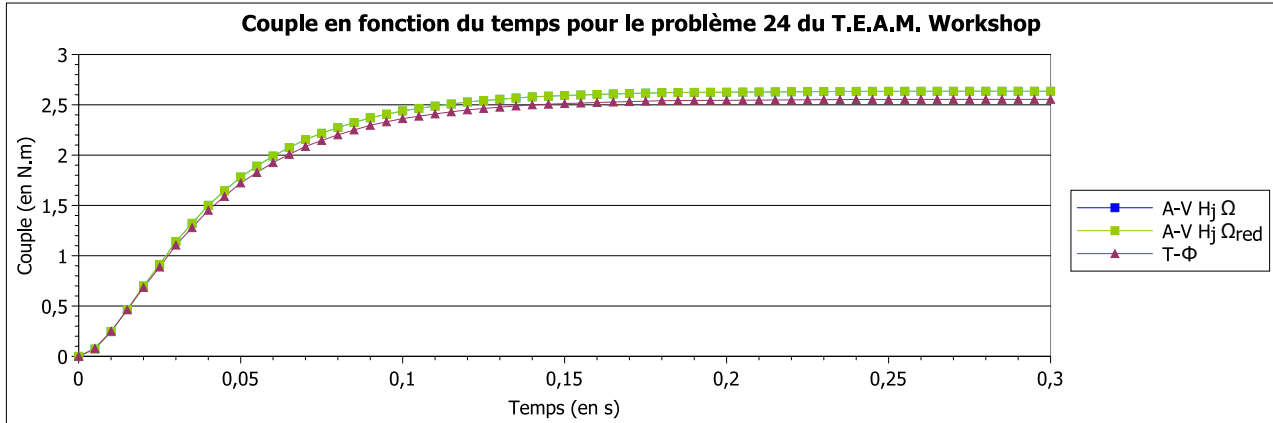


FIGURE 6.9 – Couple en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La figure 6.10 représente l'écart relatif du couple par rapport à la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ en fonction du temps. Sur cette figure comme sur la précédente, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est identique qu' \mathbf{H}_j soit calculé sur Ω ou Ω_{red} . Les écarts relatifs du couple entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ sont grands aux premiers pas de temps parce que les grandeurs comparées sont petites. Mais à partir du 3^{ème} pas de temps, il est inférieur à 4 %.

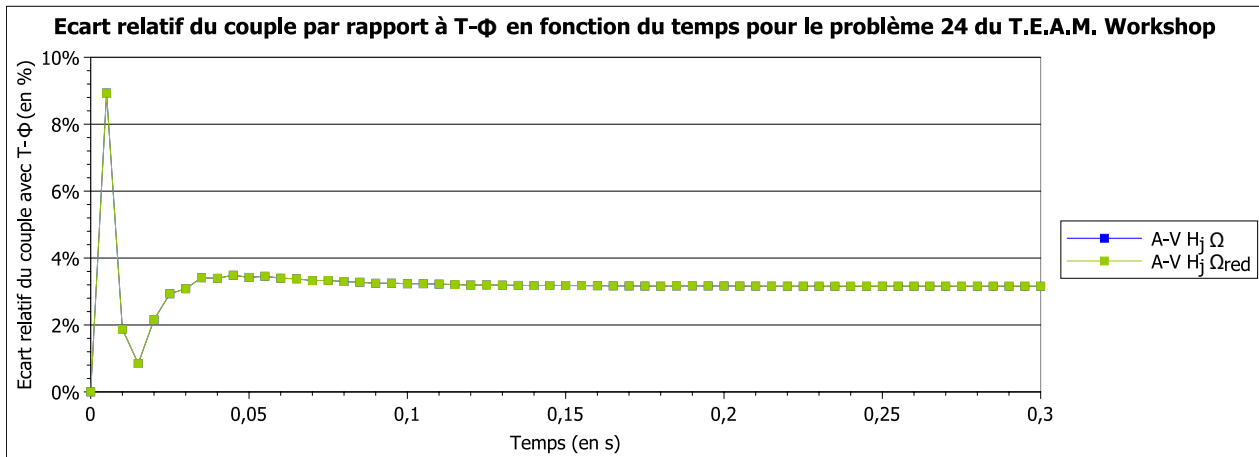


FIGURE 6.10 – Écart relatif du couple par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Finalement, le calcul des termes sources sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} n'influe pas sur le résultat du couple. Dans le prochain paragraphe, la même étude sera effectuée sur le flux magnétique.

6.3.3.3 Flux magnétique

6.3.3.3.1 A travers une section d'un pôle magnétique du rotor

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines maillées, le flux magnétique sur une face d'un pôle du rotor en fonction du temps est représenté sur la figure 6.11. La face du

6.3. VALIDATIONS ET RÉSULTATS DES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

pôle magnétique du rotor, sur laquelle est calculée le flux, est visible en noire sur la figure 5.11b. Sur la figure 6.11, le flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor est identique pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j calculé soit sur le domaine complet Ω , soit sur le domaine réduit Ω_{red} . De plus, le flux est similaire pour les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$.

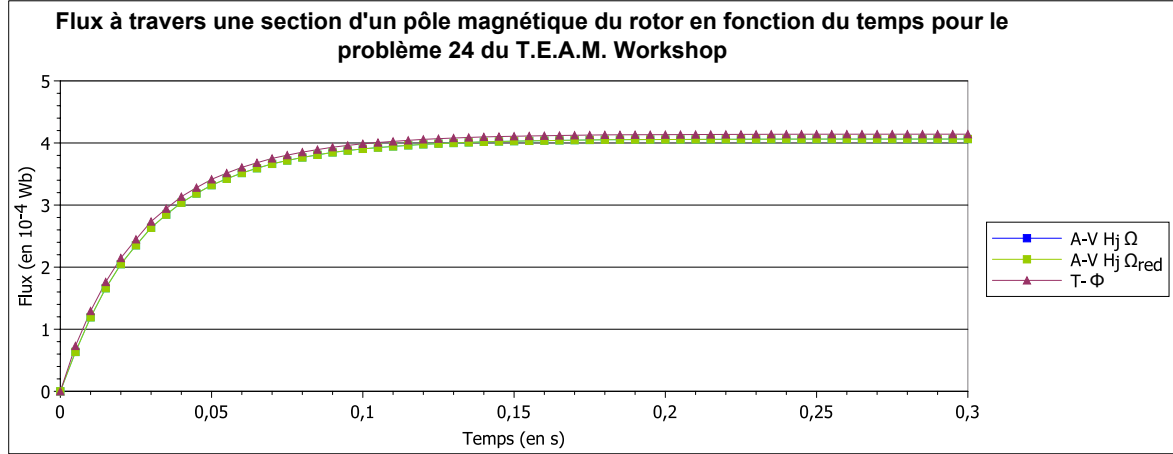


FIGURE 6.11 – Flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La figure 6.12 représente l'écart relatif du flux sur l'encoche du rotor en fonction du temps par rapport à $\mathbf{T} - \phi$. Sur cette figure comme sur la précédente, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est identique qu' \mathbf{H}_j soit calculé sur Ω ou Ω_{red} . L'écart relatif du flux sur les encoches entre les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ est d'environ 2 %.

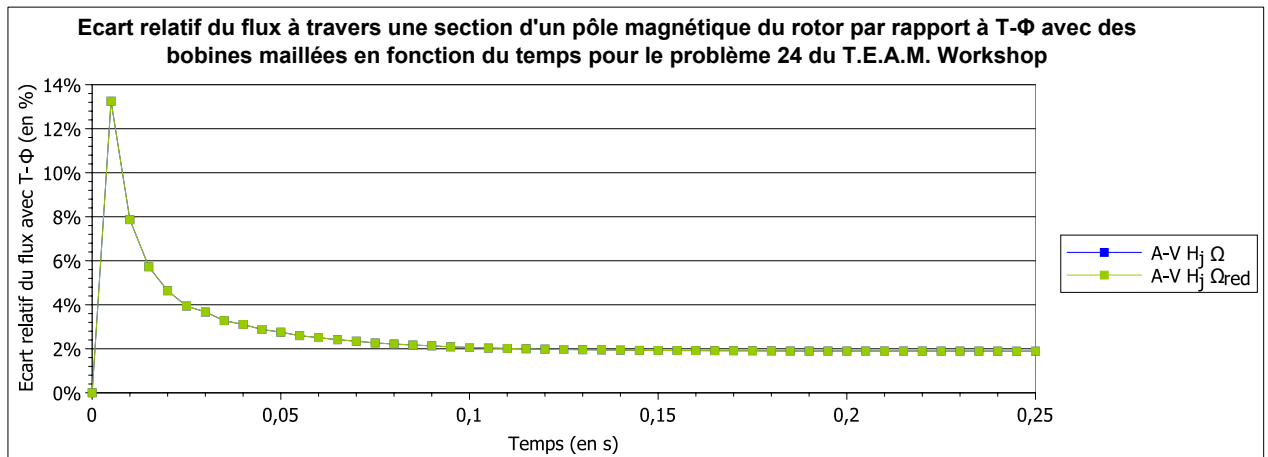


FIGURE 6.12 – Écart relatif du flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Finalement, le calcul des termes sources sur Ω ou Ω_{red} n'influe pas sur le flux de l'encoche du rotor. Dans le prochain paragraphe, le flux sera étudié pour les bobines.

6.3.3.3.2 Des bobines

La figure 6.13 représente aussi le flux en fonction du temps, mais celui des bobines maillées du problème 24 du T.E.A.M. Workshop. Sur cette figure, le flux des bobines de la formulation

en $\mathbf{A} - V$ est identique que le terme source \mathbf{H}_j soit calculé sur le domaine complet Ω ou sur le domaine réduit Ω_{red} . De plus, le flux des bobines est similaire pour les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$.

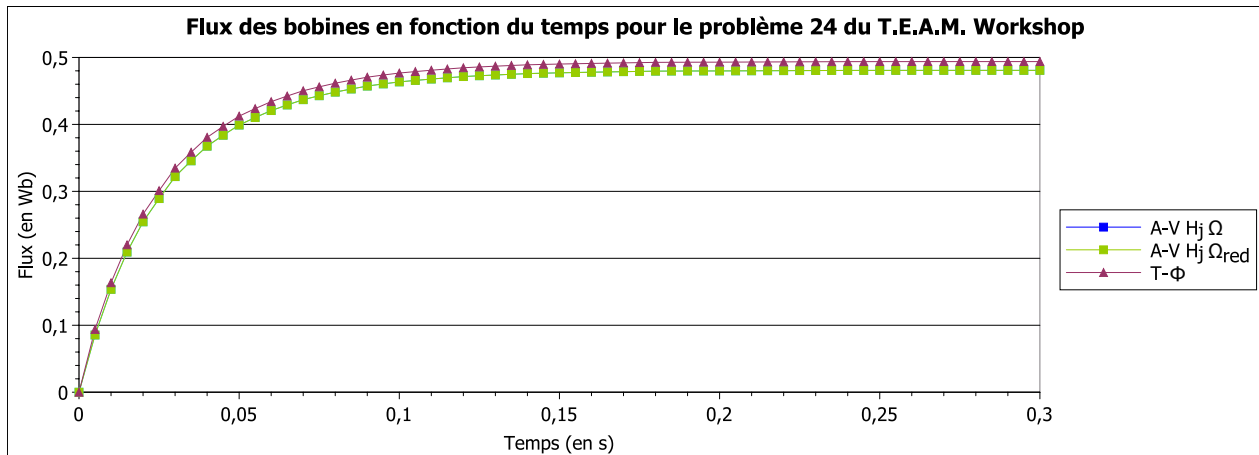


FIGURE 6.13 – Flux des bobines en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La figure 6.14 représente l'écart relatif du flux des bobines en fonction du temps par rapport à $\mathbf{T} - \phi$. Sur cette figure comme sur la précédente, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est identique qu' \mathbf{H}_j soit calculé sur Ω ou Ω_{red} . L'écart relatif du flux des bobines entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ est d'environ 3 %.

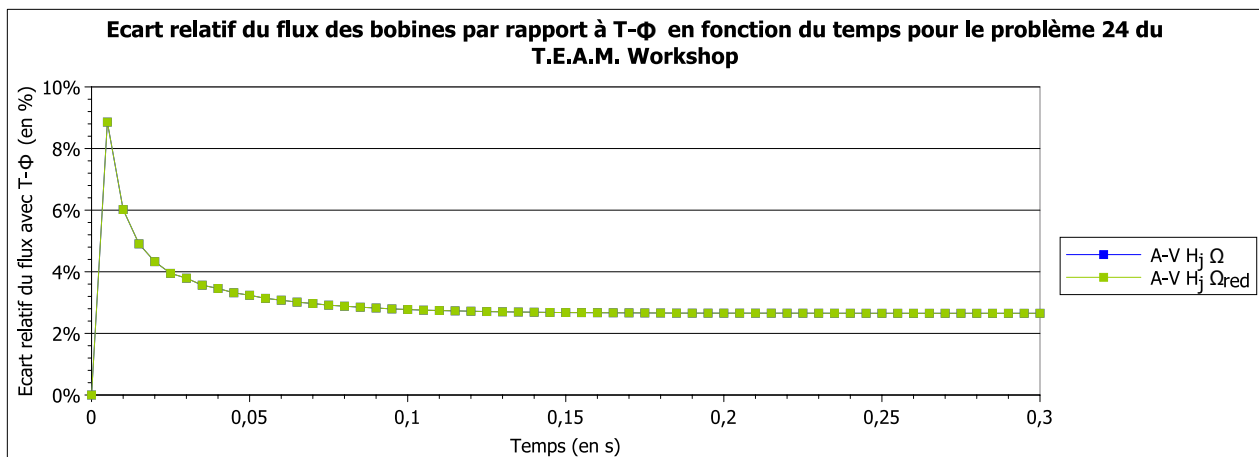


FIGURE 6.14 – Écart relatif du flux des bobines par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Finalement, le calcul des termes sources sur un domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} n'influe pas sur le flux des bobines maillées. Dans le prochain paragraphe, une grandeur locale, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point sera étudiée.

6.3.3.4 Induction magnétique \mathbf{B} en un point

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop avec des bobines maillées, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point du stator entre les pôles magnétiques du rotor et du

6.3. VALIDATIONS ET RÉSULTATS DES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

stator en fonction du temps est représenté sur la figure 6.15. Le point de calcul de \mathbf{B} est en noir sur la figure 5.11b. Sur cette figure 6.15, la composante en y de \mathbf{B} , B_y , est identique pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j calculé soit sur le domaine complet Ω , soit sur le domaine réduit Ω_{red} . De plus, B_y est similaire pour les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$.

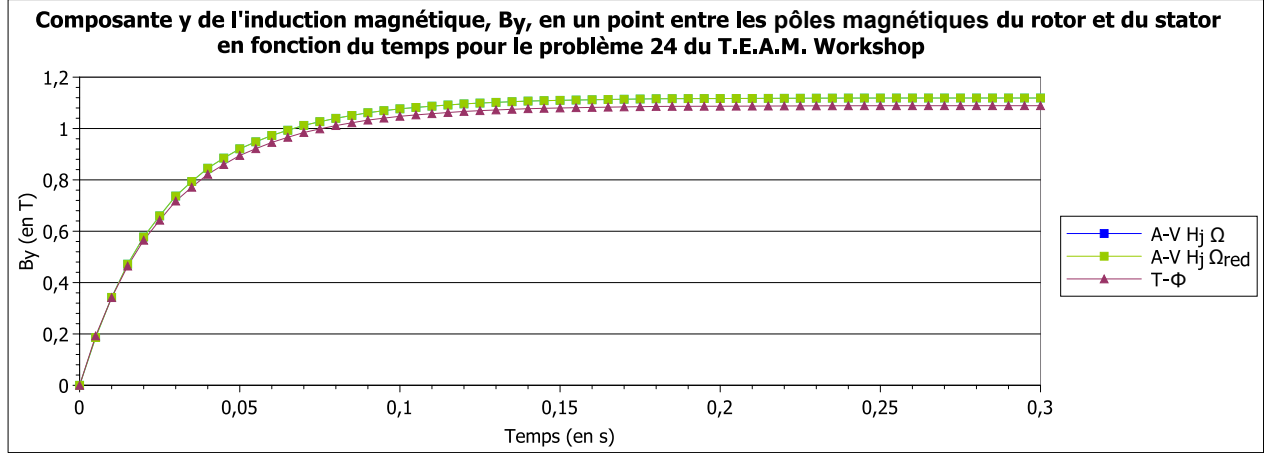


FIGURE 6.15 – Composante en y de l'induction magnétique, B_y , en un point entre le rotor et le stator en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La figure 6.16 représente l'écart relatif de B_y en un point dans l'entrefer en fonction du temps par rapport à la formulation en $\mathbf{T} - \phi$. Sur cette figure comme sur la précédente, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est identique qu' \mathbf{H}_j soit calculé sur Ω ou Ω_{red} . L'écart relatif de B_y entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{T} - \phi$ est de 3 %.

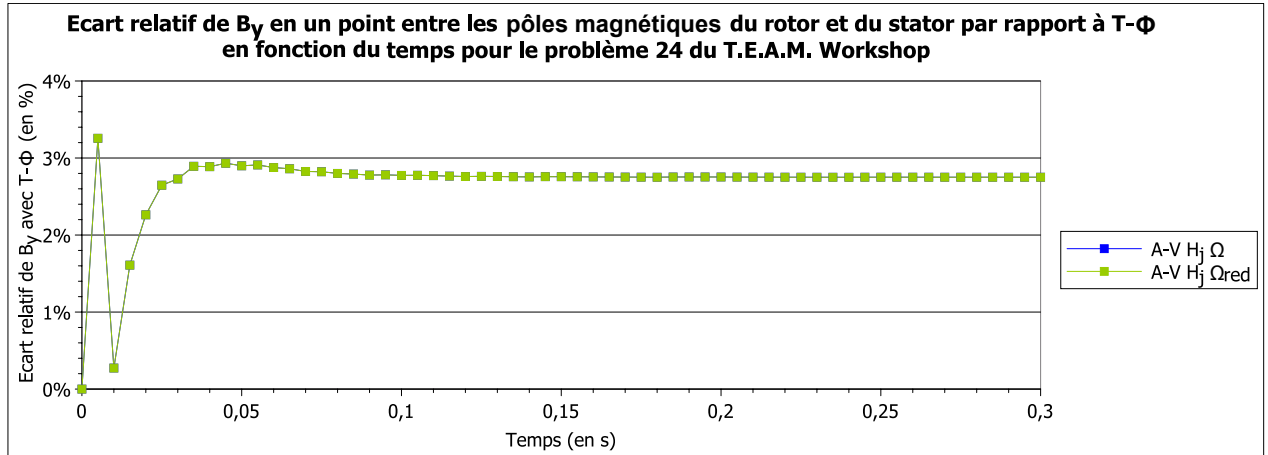


FIGURE 6.16 – Écart relatif de B_y en un point entre le rotor et le stator par rapport à $\mathbf{T} - \phi$ en fonction du temps pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Finalement, que le calcul des termes sources soit fait sur le domaine complet Ω ou le domaine réduit Ω_{red} n'influe pas sur la valeur de la composante en y de l'induction magnétique en un point de l'entrefer.

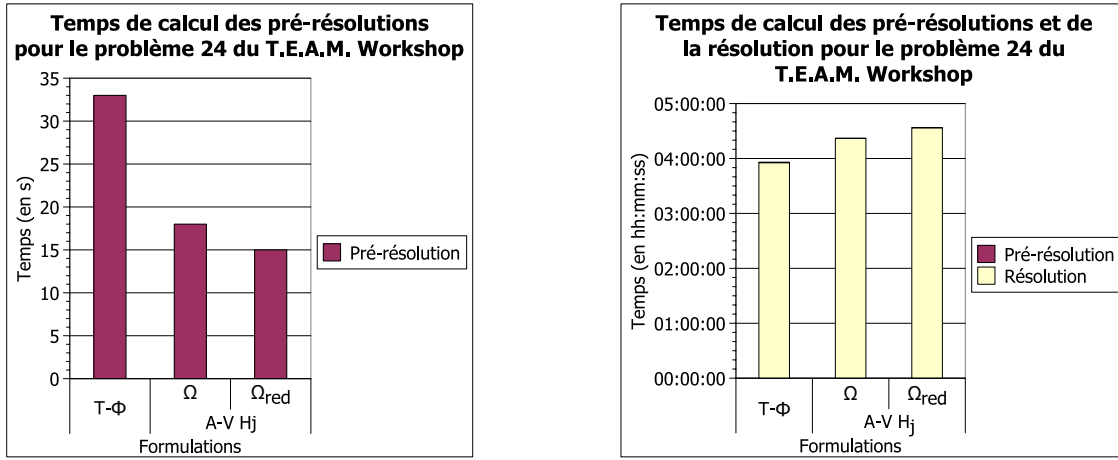
Dans ces derniers paragraphes, l'influence du calcul du terme source \mathbf{H}_j pour des bobines maillées sur un domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} a été étudiée sur des grandeurs globales, le couple et le flux, et sur une grandeur locale, B_y . Donc pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des

bobines maillées, le terme source \mathbf{H}_j calculé sur Ω donne les mêmes résultats que lorsqu'il est calculé sur Ω_{red} .

Dans le prochain paragraphe, les temps de calcul des pré-résolutions et des résolutions des formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j calculé sur Ω ou Ω_{red} seront détaillés.

6.3.3.5 Temps de calcul du solveur

Les temps de calcul des pré-résolutions et de la résolution des formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j calculé sur le domaine complet Ω ou réduit Ω_{red} sont donnés sur la figure 6.17b. Le détail des temps de pré-résolutions est donné sur la figure 6.17a. Les pré-résolutions et les résolutions sont effectuées avec le solveur itératif du gradient conjugué, ICCG.



(a) Pré-résolutions

(b) Pré-résolutions & Résolution

FIGURE 6.17 – Temps de calcul pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Sur la figure 6.17a, les temps de pré-résolution sont du plus lent au plus rapide pour : la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ en 33 secondes, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j calculé sur Ω en 18 secondes, et la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j sur Ω_{red} en 15 secondes. Il est plus rapide de calculer le terme source \mathbf{H}_j sur le domaine réduit Ω_{red} que sur le domaine complet Ω , parce que le domaine Ω_{red} est plus petit que le domaine Ω .

Du plus lent au plus rapide, les temps totaux de pré-résolutions et de résolution de la figure 6.17b sont pour les formulations : en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j sur Ω_{red} (en 4 heures et 30 minutes), en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j sur Ω (en 4 heures et 20 minutes) et en $\mathbf{T} - \phi$ (en 3 heures et 55 minutes). Finalement, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j calculé sur le domaine réduit Ω_{red} est résolue un peu moins vite mais en un temps équivalent que la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{H}_j calculé sur le domaine complet Ω . De plus, ces formulations sont résolues un peu moins vite que celle en $\mathbf{T} - \phi$ mais dans des temps équivalents.

6.3.4 Conclusion

Pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, les termes sources \mathbf{H}_j avec des bobines maillées et \mathbf{A}_j avec des bobines non maillées, choisis dans le chapitre 5 et calculés sur le domaine complet Ω , sont calculés dans cette section sur le domaine réduit Ω_{red} pour éviter d'assurer les continuités des sources lorsque que le dispositif est en mouvement et de calculer les sources à chaque pas de

6.3. VALIDATIONS ET RÉSULTATS DES TERMES SOURCES SUR UN DOMAINE RÉDUIT

temps par une pré-résolution. Le domaine réduit Ω_{red} comprend les bobines et est défini soit comme la partie du domaine Ω mobile, soit comme la partie fixe.

Finalement, le calcul du terme source \mathbf{H}_j sur un domaine réduit Ω_{red} donne les mêmes résultats que lorsqu'il est calculé sur un domaine complet Ω . De plus, le calcul du terme source \mathbf{H}_j sur Ω_{red} est un peu plus lent que le calcul sur Ω , mais les temps restent du même ordre de grandeur.

Le calcul du terme source \mathbf{A}_j sur un domaine réduit Ω_{red} donne aussi les mêmes résultats que sur un domaine complet Ω . En revanche pour un petit cas comme le tore, les temps de calcul d' \mathbf{A}_j sur Ω_{red} sont deux fois plus grands que ceux sur Ω , parce que la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{A}_j sur Ω_{red} n'est plus compatible. Il faut alors utiliser un arbre d'arête avec les solveurs itératifs ce qui ralentit beaucoup la convergence du solveur. De plus sur un petit cas, les solveurs directs restent plus lents même si les solveurs itératifs résolvent avec une jauge par arbre. Pour un gros cas comme celui de la machine asynchrone, il n'y a pas besoin de jauge par arbre avec les solveurs itératifs. Alors, le terme source \mathbf{A}_j sur le domaine réduit Ω_{red} est calculé un peu plus lentement que sur le domaine complet Ω , mais en des temps équivalents.

Donc sur des cas tests réels, la formulation en potentiel vecteur magnétique avec les termes sources calculés sur un domaine réduit donne les mêmes résultats en des temps équivalents que sur le domaine complet. Dans la prochaine partie, la prise en compte du mouvement pourra être étudiée pour la formulation en $\mathbf{A} - V$.

Conclusion de la partie II

Dans cette partie, les termes sources des formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ ont été étudiés pour rendre les formulations compatibles et calculer les sources une seule fois.

Dans le quatrième chapitre, plusieurs sources sont décrites pour des bobines maillées et des bobines non maillées. Les sources étudiées pour des bobines maillées sont le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j , calculé par la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme de l'espace des éléments d'arête $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, et le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j , calculé par la projection de \mathbf{J}_s . Pour des bobines non maillées, les sources étudiées sont \mathbf{H}_j , calculé par la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de l'espace des éléments nodaux $\mathbf{L}^2(\Omega)$, \mathbf{A}_j , calculé par la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, et encore \mathbf{A}_j , mais calculé par la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Ces termes sources rendent les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ compatibles.

Dans le cinquième chapitre, ces sources ont été validées sur trois cas tests : une encoche en magnétostatique avec une bobine maillée ou avec une bobine non maillée, une machine asynchrone en magnétoharmonique avec des bobines non maillées et le problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnétique transitoire avec des bobines maillées ou avec des bobines non maillées. Pour des bobines maillées, le meilleur terme source est \mathbf{H}_j , la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, parce que la pré-résolution en \mathbf{A}_j n'est pas compatible. Pour des bobines non maillées, le terme source \mathbf{H}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, engendre des erreurs locales et le terme source \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{A}_s et d' \mathbf{H}_s avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, est très long à calculer. Donc pour des bobines non maillées, le meilleur terme source est \mathbf{A}_j , la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Ce chapitre permet aussi de déterminer la meilleure formulation en potentiel vecteur magnétique. Avec des bobines maillées ou non maillées, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ sont équivalentes. Mais la formulation en $\mathbf{A} - V$ est plus simple à implémenter, elle est donc choisie comme la meilleure formulation. Une comparaison entre les formulations en $\mathbf{T} - \phi$ et en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources choisis a aussi été réalisée. Pour des bobines non maillées, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{A}_j est 2,5 fois plus rapide que la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ de Flux[®]. En revanche pour des bobines maillées, la formulation en $\mathbf{T} - \phi$ est 1,4 fois plus rapide que la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{H}_j .

Dans le sixième chapitre, les termes sources en \mathbf{H}_j pour des bobines maillées, la projection de \mathbf{J}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, et en \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées, la projection d' \mathbf{H}_s avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ sont calculés sur un domaine réduit englobant les bobines. Dans le chapitre précédent, ces termes sources étaient étudiés sur le domaine complet du dispositif. Pour des bobines maillées, il est facile d'étudier le terme source \mathbf{H}_j sur un domaine réduit : il suffit de le calculer seulement sur ce domaine réduit et d'annuler ces circulations sur le bord du domaine. En revanche pour des bobines non maillées, il est plus difficile d'étudier le terme source \mathbf{A}_j sur un domaine réduit. Avec la solution trouvée, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec le terme source \mathbf{A}_j calculé sur un domaine réduit n'est plus

compatible. Mais pour des gros problèmes, il est possible de résoudre la formulation en $\mathbf{A} - V$ sans condition de jauge même si elle n'est pas compatible. Finalement pour des bobines maillées, le terme source en \mathbf{H}_j donne les mêmes résultats qu'il soit calculé sur le domaine complet ou sur un domaine réduit en des temps équivalents. Pour des bobines non maillées, le terme source en \mathbf{A}_j calculé sur un domaine réduit donne les mêmes résultats que lorsqu'il est calculé sur le domaine complet en des temps équivalents pour des gros problèmes, mais 2 fois plus lentement pour des petits problèmes.

Les cinquième et sixième chapitres ont aussi permis d'étudier les solveurs. Le solveur direct MUMPS est toujours utilisé avec un arbre d'arêtes comme condition de jauge. Le solveur itératif ICCG est utilisé sans arbre d'arêtes lorsque la formulation est compatible. De plus, l'arbre d'arêtes ralentit énormément la convergence d'ICCG. C'est pourquoi nos formulations sont compatibles. Lorsque la formulation n'est pas compatible, il vaut mieux utiliser le solveur direct MUMPS. En général, le solveur ICCG sans jauge résout les formulations plus rapidement que le solveur MUMPS. Mais pour des gros problèmes, les temps de résolution des deux solveurs deviennent équivalents.

Finalement, cette partie a permis de déterminer la meilleure formulation avec le meilleur terme source pour des bobines maillées et pour des bobines non maillées. De plus, les termes sources choisis pour des bobines maillées et non maillées ont été étudiés sur un domaine réduit afin de prendre en compte le mouvement. En effet lorsqu'une partie du domaine complet est en mouvement, la continuité des grandeurs doit être assurée entre la partie du domaine en mouvement et la partie fixe. Pour éviter d'assurer la continuité des termes sources, ces derniers sont calculés sur un domaine réduit, la partie du domaine en mouvement ou la partie fixe suivant laquelle contient des bobines. Donc la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec les termes sources \mathbf{H}_j ou \mathbf{A}_j peut être étudiée sur un domaine en mouvement. Dans la prochaine partie, la prise en compte du mouvement sera étudiée.

PARTIE III

Prise en compte du mouvement pour les formulations en potentiel vecteur magnétique

Introduction de la partie III

Les deux premières parties de cette thèse ont permis d'étudier les formulations en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique et leurs termes sources, puis de valider ces formulations et leurs termes sources sur des cas tests. Ces cas tests ont permis de choisir la formulation en $\mathbf{A} - V$, plutôt que la formulation en $\mathbf{A}_r - V$ plus difficile à implémenter, avec le terme source en champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j pour des bobines maillées et en potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j pour des bobines non maillées. De plus, le sixième chapitre a permis de calculer ces termes sources sur un domaine réduit.

Le but de cette thèse est de développer des outils de simulation pour étudier des machines asynchrones. Or, l'étude des machines asynchrones induit l'étude du mouvement de son rotor par rapport à son stator. Donc, des méthodes de prise en compte du mouvement seront étudiées dans cette partie.

Dans le septième chapitre de cette thèse, plusieurs méthodes de prise en compte du mouvement seront décrites. Dans un premier temps, la méthode eulérienne sera étudiée. Cette méthode ajoute un terme de mouvement dans la formulation. Dans un second temps, la méthode lagrangienne sera étudiée pour avoir une méthode indépendante de la formulation. Dans cette méthode, la formulation est résolue de manière indépendante dans le repère du domaine fixe, le stator, et dans le repère du domaine mobile, le rotor. A l'interface entre les domaines fixe et mobile, la continuité des variables doit être assurée. Différentes méthodes seront étudiées pour assurer cette continuité. De plus, les termes sources seront calculés sur un domaine réduit, comme étudié dans le sixième chapitre, correspondant au domaine fixe ou mobile, pour ne pas avoir besoin d'assurer la continuité des termes sources à l'interface entre les domaines mobile et fixe.

L'étude des méthodes de prise en compte du mouvement dans le septième chapitre permettra de choisir une méthode réalisable en trois dimensions avec des éléments finis d'arête et obtenant des bons résultats sans contrainte sur le pas de temps et le maillage. La méthode choisie sera ensuite détaillée dans le huitième chapitre.

Dans le neuvième chapitre, cette méthode de prise en compte du mouvement est validée en deux dimensions sur deux cas tests : le problème 24 du T.E.A.M. Workshop en magnéto-statique et une machine de géométrie simple en magnétique transitoire. Les résultats obtenus sont comparés à la méthode d'interpolation implémentée dans Flux[®] pour des éléments finis nodaux. Le problème 24 permet de valider la méthode choisie avec des éléments finis nodaux. La machine de géométrie simple permet de valider la méthode avec des éléments finis nodaux et d'arête.

Chapitre 7

État de l’art des méthodes de prise en compte du mouvement

Sommaire

7.1	Référentiels d’étude	162
7.1.1	Méthode Eulérienne	162
7.1.2	Méthode Lagrangienne	163
7.2	Méthodes basées sur un entrefer volumique	165
7.2.1	Remaillage	165
7.2.2	Macro-élément	167
7.2.3	Couplage avec les intégrales de frontière	168
7.2.4	Overlapping	169
7.3	Méthodes basées sur une surface de glissement	171
7.3.1	Pas bloqué	171
7.3.2	Multiplicateurs de Lagrange	172
7.3.3	Interpolation	173
7.3.4	Éléments avec joints	174
7.4	Conclusion	176

Le but de cette thèse est de modéliser les machines asynchrones avec les formulations en potentiel vecteur magnétique. Or, les machines sont composées d'un rotor en mouvement et d'un stator fixe. Dans ce chapitre, la prise en compte du mouvement du rotor sera étudiée.

7.1 Référentiels d'étude

Soit Ω le domaine d'étude. Une partie de ce domaine est en mouvement, il est noté Ω_m et parfois appelé *rotor*; le reste du domaine est fixe, noté Ω_f et parfois appelé *stator*. Les mouvements possibles du domaine mobile Ω_m sont la rotation autour d'un axe et la translation selon une direction. La vitesse de rotation et de translation du domaine Ω_m est notée \mathbf{v} .

Les méthodes pour prendre en compte le mouvement du domaine Ω_m sont classées en 2 catégories selon les référentiels utilisés :

- la *méthode eulérienne*, basée sur l'utilisation d'un seul référentiel indépendant de la position du domaine mobile Ω_m [Kurz et al., 1998]-[Leconte, 2000]-[Rapetti, 2000] ;
- la *méthode lagrangienne*, basée sur l'utilisation de deux référentiels, un lié au domaine mobile Ω_m et l'autre lié au domaine fixe Ω_f .

7.1.1 Méthode Eulérienne

Les grandeurs magnétiques, \mathbf{B} et \mathbf{H} , et électriques, \mathbf{J}_e et \mathbf{E} , dépendent du temps t mais aussi de la position \mathbf{x} . Pour la méthode eulérienne, la position d'un point d' Ω dépend du temps vu qu' Ω_m est en mouvement. Alors les dérivées en temps total $\frac{d}{dt}$ et partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ ne sont pas égales. Une seule des équations de Maxwell (1.1), décrites dans le chapitre 1, fait intervenir une dérivée en temps, l'équation de Maxwell-Faraday (1.1b) pour l'induction magnétique \mathbf{B} , i.e. $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

Pour prendre en compte le mouvement sans changer de référentiel, la dérivée totale de \mathbf{B} est définie en fonction de la dérivée partielle telle que :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B}, \quad (7.1)$$

où \mathbf{grad} est l'opérateur gradient de dimension d (en 2D $d = 2$ et en 3D $d = 3$) et tel que $(\mathbf{grad} \mathbf{B})_{i,j} = \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq d$ avec l'induction magnétique $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_d)$ et

la position $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Dans cette relation, la dérivée totale $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ est nommée dérivée de convection, et le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B}$ est la dérivée de Lie en écriture vectorielle. Le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B}$ peut se décomposer avec l'équation (A.5) de l'annexe A.2.2 tel que :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.2)$$

Avec la relation (7.2) et l'équation de Maxwell-Thomson (1.1c), i.e. $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, la dérivée de convection $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ (7.1) s'écrit telle que :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.3)$$

7.1. RÉFÉRENTIELS D'ÉTUDE

Enfin en remplaçant $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ par $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ (7.3), l'équation de Maxwell-Faraday (1.1b) s'écrit pour la méthode eulérienne telle que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (7.4)$$

Finalement si la géométrie du domaine mobile Ω_m est invariante avec le déplacement, la prise en compte du mouvement peut se faire avec un maillage fixe par l'ajout du terme de mouvement $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ pour le champ électrique \mathbf{E} .

Le principal inconvénient de la méthode eulérienne est que l'ajout du terme $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ à l'équation de Maxwell-Faraday (7.4) rend la matrice de résolution non symétrique. Alors, de nombreuses méthodes d'inversion ne peuvent pas être utilisées, puisqu'elles sont valables seulement pour des matrices symétriques. De plus lorsque la taille des éléments dans la direction du mouvement devient grande, cette méthode est instable numériquement. Il faut alors mailler les régions conductrices en hexaèdres orientés dans la direction de la vitesse [Maréchal, 1991].

Dans cette sous-section, la méthode eulérienne, avec un seul référentiel pour les domaines mobile et fixe, a été étudiée. Dans la prochaine sous-section, la méthode lagrangienne, avec un référentiel pour le domaine mobile et un pour le domaine fixe, sera décrite.

7.1.2 Méthode Lagrangienne

Pour la méthode lagrangienne, deux repères sont définis : un repère fixe lié au domaine fixe Ω_f et un repère mobile lié au domaine en mouvement Ω_m . Alors, les équations de Maxwell sont inchangées avec cette méthode et la dérivée partielle de l'induction magnétique par rapport au temps est égale à la dérivée totale, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}$, car la position d'un point d' Ω ne dépend pas du temps. En revanche, le maillage est attaché au repère mobile, donc il suit le mouvement. A cause du mouvement du maillage d' Ω_m , le maillage à l'interface des domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m peut devenir non-conforme.

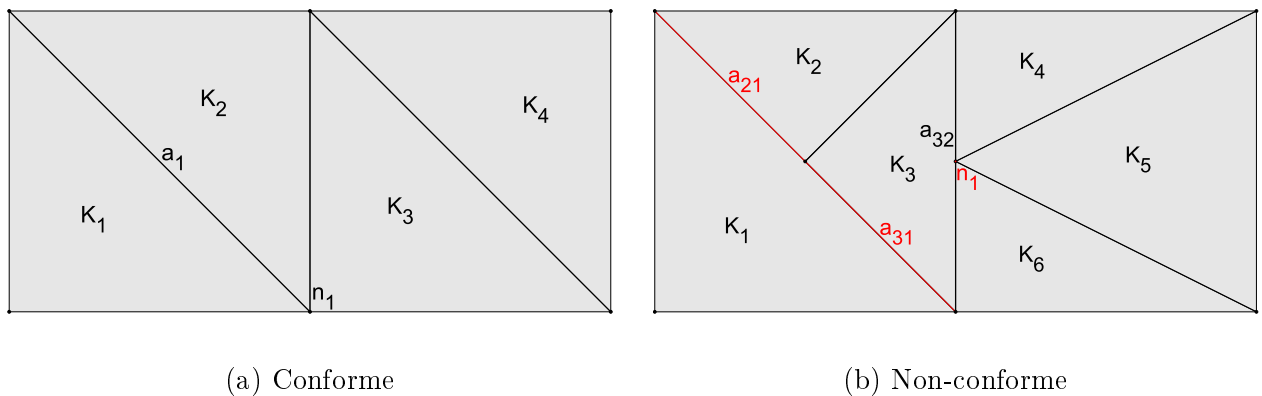


FIGURE 7.1 – Maillages conforme et non-conforme

Un maillage est *conforme* quand les éléments $K_i, 1 \leq i \leq n_K$, du maillage sont tels que :

$$K_i \cap K_j = \begin{cases} \text{une facette entière de } K_i \text{ et } K_j, \\ \text{une arête entière de } K_i \text{ et } K_j, \\ \text{un point de } K_i \text{ et } K_j, \\ \emptyset, \end{cases} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n_K, \quad (7.5)$$

avec n_K le nombre d'éléments du maillage du domaine Ω . Alors, un maillage est *non-conforme* s'il ne respecte pas une des conditions de (7.5). Sur la figure 7.1, des exemples de maillages conformes et non-conformes sont représentés. Le maillage de la figure 7.1a est conforme. Par exemple, l'élément K_1 est conforme avec l'élément K_2 parce qu'ils partagent l'arête a_1 , K_1 est aussi conforme avec l'élément K_3 parce qu'ils partagent le nœud n_1 et K_1 est conforme avec l'élément K_4 parce qu'ils ne partagent rien. En revanche le maillage de la figure 7.1b est non-conforme puisque les éléments K_1 et K_2 partagent l'arête a_{21} mais cette arête ne correspond pas à l'arête entière de K_1 , de même pour les éléments K_1 et K_3 . Les éléments K_3 et K_4 sont aussi non-conformes car le point n_1 de K_4 ne coïncident pas avec un point de K_3 , de même pour les éléments K_3 et K_5 , et K_3 et K_6 .

A cause du mouvement, le maillage à l'interface des domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m est non-conforme pour la méthode lagrangienne. Or lorsque le maillage est non-conforme, les continuités physiques de la composante normale de \mathbf{B} et de \mathbf{J}_e et de la composante tangentielle de \mathbf{H} et de \mathbf{E} doivent être assurées à travers l'interface entre les domaines fixe et mobile par les conditions aux limites de la sous-section 1.1.3.

Dans les prochaines sections, plusieurs méthodes seront étudiées pour obtenir un maillage conforme à chaque mouvement ou pour assurer la continuité des grandeurs physiques lorsque le maillage est non-conforme. Ces méthodes seront divisées en deux catégories : les méthodes avec un volume entre les domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m et celles avec une surface entre Ω_f et Ω_m . Les méthodes basées sur un entrefer volumique, un volume entre Ω_f et Ω_m , étudiées dans ce chapitre, sont le macro-élément, le couplage avec les intégrales de frontière, le remaillage et l'overlapping. Les méthodes basées sur une surface de glissement, une surface entre Ω_f et Ω_m , sont le pas bloqué, les multiplicateurs de Lagrange, la connexion par interpolation et les éléments avec joints. Les méthodes du remaillage et du pas bloqué permettent d'obtenir un maillage conforme. Toutes les autres méthodes ont un maillage non-conforme et permettent d'assurer la continuité des grandeurs physiques.

Toutes ces méthodes ont été étudiées en éléments nodaux et certaines ont été comparées dans [Shi, 2005]–[Antunes *et al.*, 2005]–[Antunes *et al.*, 2006]–[Shi *et al.*, 2008]. Cependant la formulation en potentiel vecteur magnétique, développée dans cette thèse, est en 3D et en éléments d'arête, et ces méthodes de prise en compte du mouvement ont été peu étudiées en 3D et en éléments d'arête.

7.2 Méthodes basées sur un entrefer volumique

Le domaine d'étude Ω est décomposé en trois sous-domaines tels que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_m \cup \Omega_{fm}$:

- Ω_f , la partie du domaine Ω fixe ;
- Ω_m , la partie du domaine Ω mobile ;
- Ω_{fm} , l'*entrefer volumique*, i.e. la région volumique entre les domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m .

L'interface du domaine fixe Ω_f et de l'entrefer volumique Ω_{fm} est notée $\Gamma_{f-fm} = \Omega_f \cap \Omega_{fm}$. De la même façon, l'interface du domaine mobile Ω_m et de l'entrefer volumique Ω_{fm} est notée $\Gamma_{m-fm} = \Omega_m \cap \Omega_{fm}$. Ces domaines sont représentés sur la figure 7.2.

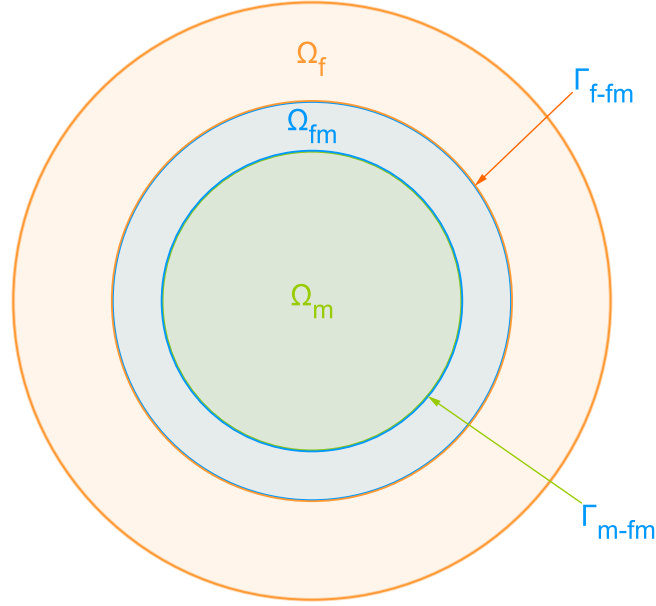


FIGURE 7.2 – Entrefer volumique Ω_{fm} entre les domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f en 2D

Dans cette section, quatre méthodes basées sur un entrefer volumique seront étudiées : le remaillage, le macro-élément, le couplage avec les intégrales de frontière et l'overlapping.

7.2.1 Remaillage

Pour prendre en compte le mouvement, une méthode très simple à mettre en œuvre est le remaillage du domaine complet ou d'une partie du domaine. Ce remaillage peut se faire à chaque nouvelle position du domaine mobile Ω_m ou quand la qualité du maillage est détériorée par le mouvement.

Le remaillage de l'entrefer volumique Ω_{fm} est généralement appelé la méthode de la bande de mouvement ou de roulement. Cette méthode de remaillage est expliquée en 2D avec des triangles dans [Ratnajeevan et Hoole, 1985]–[Davat *et al.*, 1985]–[Vassent, 1990]–[Vassent, 1991] et avec des éléments finis d'ordre élevé dans [Antunes *et al.*, 2004], en 2D avec des quadrangles dans [Sadowski *et al.*, 1992] et en 3D avec des hexaèdres et des prismes dans [Shi, 2005]. En 2D en éléments nodaux avec des quadrangles, elle est comparée dans [Antunes *et al.*, 2005] avec la méthode des éléments avec joints, qui sera décrite dans la sous-section 7.3.4. La méthode de la bande de mouvement est décrite sur la figure 7.3.

Le remaillage partiel, ou bande de mouvement, consiste à remailler seulement une couche d'éléments se situant dans l'entrefer Ω_{fm} (en bleu sur la figure 7.3) entre le domaine mobile Ω_m (en vert sur la figure 7.3) et le domaine fixe Ω_f (en orange sur la figure 7.3). Au premier pas de

temps, un maillage conforme est créé pour les domaines Ω_f , Ω_m et Ω_{fm} , comme sur la figure 7.3a. Au second pas de temps, le domaine mobile Ω_m bouge, alors les éléments finis de l'entrefer Ω_{fm} sont déformés, comme sur la figure 7.3b. Il est possible de choisir de remailler Ω_{fm} ou d'attendre la déformation maximale du maillage, atteinte après plusieurs pas de temps sur la figure 7.3c, avant de remailler. Lorsque le remaillage est effectué, une permutation et un changement de la connectivité est effectué, comme sur la figure 7.3d. Donc le maillage des domaines Ω_f et Ω_m est inchangé par cette méthode.

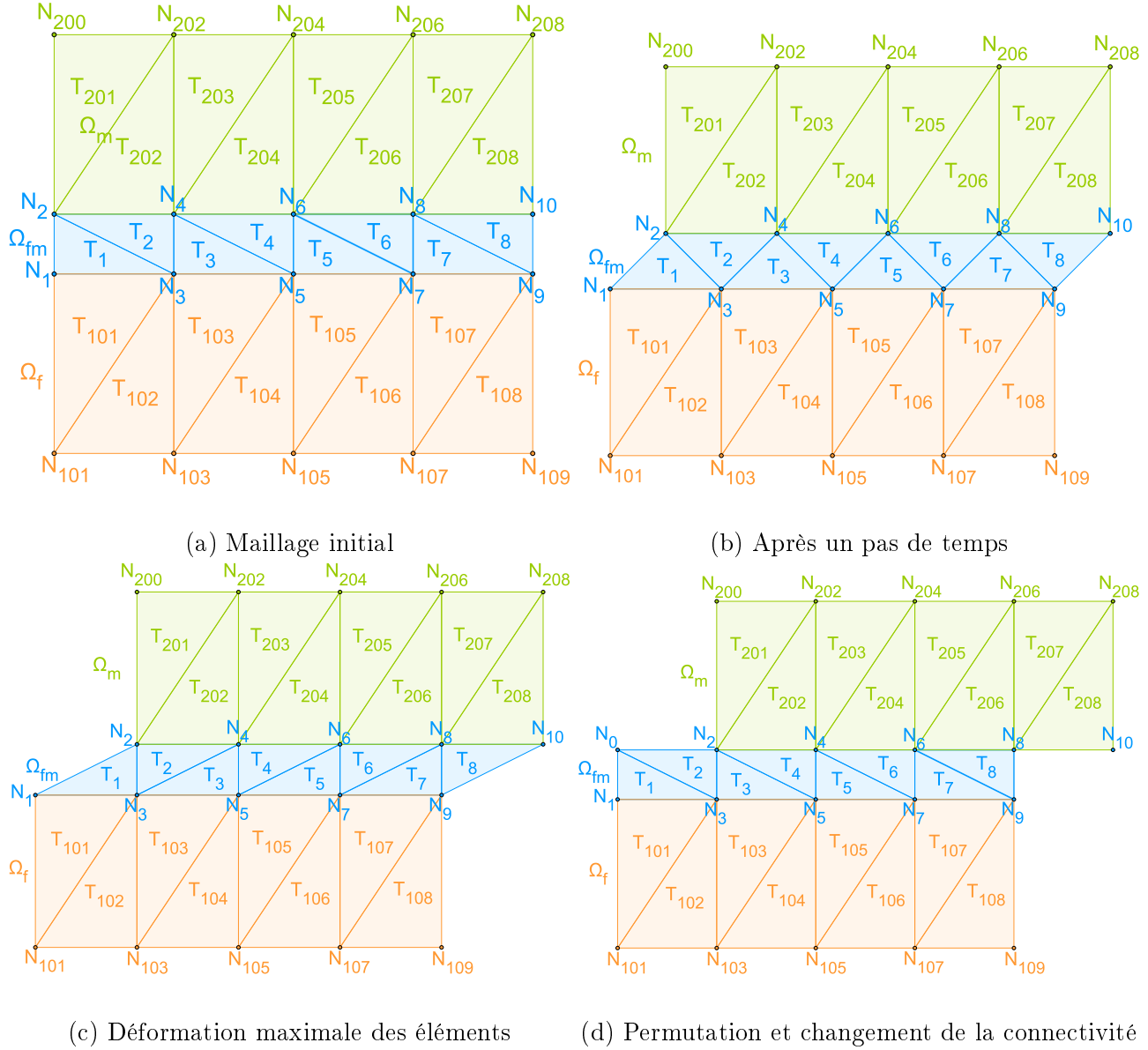


FIGURE 7.3 – Évolution des éléments de la bande de mouvement de l'entrefer volumique Ω_{fm} par rapport aux domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f en 2D

Les avantages de la méthode de remaillage sont que cette méthode est simple à mettre en œuvre, que le nombre d'inconnues à résoudre ne change pas si la zone de remaillage comporte une seule couche d'éléments et que la matrice de résolution obtenue est définie positive, creuse et symétrique.

La méthode de remaillage possède deux inconvénients majeurs. Premièrement, la génération de maillage est assez chère en temps de calcul même si un outil de génération de maillage est

utilisé. Cependant en 2D plus la zone à remailler est petite, plus les temps de remaillage sont négligeables. En 3D, il est difficile d'appliquer le remaillage. Cette méthode est facilitée si le maillage est régulier, i.e. si le maillage est composé d'hexaèdres ou de prismes. Secondement, la matrice de résolution change à chaque remaillage, des coefficients non nuls deviennent nuls et vice-versa. Si la zone de remaillage comporte plusieurs couches d'éléments, le nombre d'éléments finis du maillage varie entre chaque remaillage. Ceci perturbe la solution numérique.

Dans cette sous-section, la méthode de remaillage, totale ou partielle, a été étudiée. Elle est simple à mettre en œuvre mais elle donne des résultats imprécis. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D et avec des éléments finis nodaux ou d'arête.

Dans la prochaine sous-section, une autre méthode sera décrite, la méthode du macro-élément.

7.2.2 Macro-élément

La méthode du macro-élément permet de prendre en compte le mouvement du domaine mobile. Cette méthode est basée sur l'expression analytique du champ dans l'entrefer Ω_{fm} et détaillée en 2D avec des fonctions de forme nodales du 1^{er} ordre dans [Abdel-Razek *et al.*, 1981]–[Abdel-Razek *et al.*, 1982] et du 2^{ème} ordre dans [Feliachi *et al.*, 1983]. Le maillage de la méthode du macro-élément est détaillé sur la figure 7.4.

Dans la méthode du macro-élément, l'entrefer Ω_{fm} (en bleu sur la figure 7.4), situé entre le domaine fixe Ω_f (en orange sur la figure 7.4) et le domaine mobile Ω_m (en vert sur la figure 7.4), est considéré comme un unique élément fini, possédant des nœuds sur les domaines fixe et mobile. Donc Ω_{fm} n'est pas maillé. Dans l'entrefer Ω_{fm} où la densité de courant est nulle, le système de résolution devient l'équation de Laplace, $\Delta w_{n_i} = 0$ avec les fonctions de forme w_{n_i} associées aux nœuds du macro-élément. La solution de l'équation de Laplace peut être déterminée de façon analytique pour des géométries de forme simple.

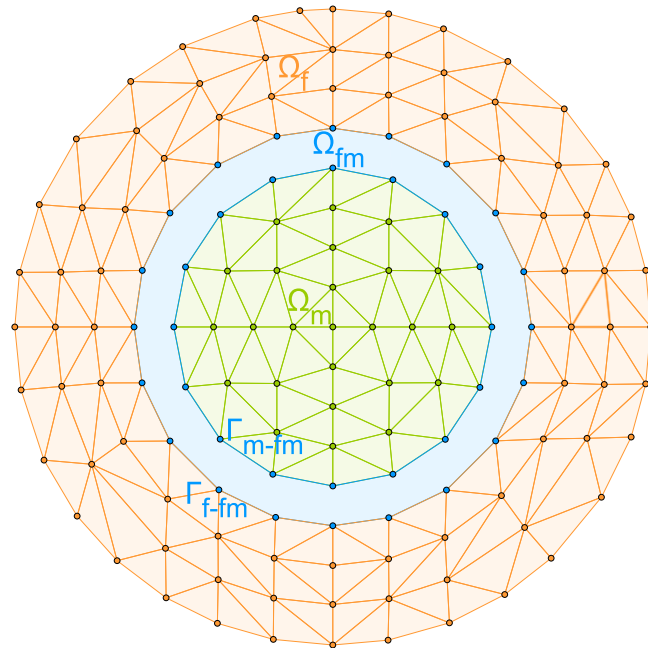


FIGURE 7.4 – Macro-élément de Ω_{fm} entre les domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f en 2D

L'avantage de la méthode du macro-élément est que l'entrefer Ω_{fm} n'est pas maillé. Effectivement, il est difficile de mailler l'entrefer lorsqu'il est fin. Un autre avantage de cette méthode

est que la solution est de bonne qualité dans Ω_{fm} .

Cependant, les degrés de liberté des nœuds du macro-élément sont connectés entre eux. Alors, la matrice de résolution perd son caractère creux et devient plus difficile à résoudre. La densité de la matrice de résolution augmente localement sa largeur de bande. Cette augmentation est acceptable en 2D, mais pas en 3D. Afin d'obtenir une matrice de résolution creuse, une amélioration de la méthode du macro-élément est proposée en 2D dans [Lee *et al.*, 1991]. De plus, la géométrie de l'entrefer ne peut pas être quelconque à cause de la résolution analytique.

Dans cette sous-section, la méthode du macro-élément a été étudiée. Elle permet d'obtenir des bonnes solutions mais avec des temps de calcul augmentés à cause de la matrice de résolution dense. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D avec des éléments finis nodaux. En 3D avec des éléments finis nodaux, il est difficile d'appliquer cette méthode car la matrice de résolution est dense. La méthode du macro-élément n'a jamais été appliquée à des éléments d'arête.

Dans la prochaine sous-section, une autre méthode sans maillage de l'entrefer sera décrite, la méthode de couplage avec les intégrales de frontière.

7.2.3 Couplage avec les intégrales de frontière

Le couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode des intégrales de frontière pour prendre en compte le mouvement est expliqué en 2D avec des éléments nodaux dans [Bouillault et Razek, 1986]-[Bouillault et Razek, 1988]-[Leconte, 2000], en 3D avec des éléments nodaux dans [Meunier *et al.*, 1986]-[Bouillault *et al.*, 1990]-[Kurz *et al.*, 1998]-[Leconte, 2000], et en 3D avec des éléments d'arête dans [Bouillault *et al.*, 1990].

Pour ce couplage, la méthode des éléments finis est appliquée dans les domaines fixe Ω_f (en orange sur la figure 7.4) et mobile Ω_m (en vert sur la figure 7.4), alors que la méthode des intégrales de frontière est appliquée sur les frontières Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} de l'entrefer Ω_{fm} (en bleu sur la figure 7.4). Ce couplage est une généralisation de la méthode du macro-élément, décrite dans la sous-section 7.2.2, à des géométries d'entrefer Ω_{fm} quelconques : au lieu de considérer un macro-élément dans Ω_{fm} , les intégrales de frontière sont considérées sur Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} . La méthode des intégrales de frontière permet la simulation de l'infini en le décrivant exclusivement à partir de la fonction inconnue et de sa dérivée sur la frontière du domaine à étudier. Une autre façon de coupler les deux méthodes est d'utiliser les intégrales de frontière dans l'air, donc à l'infini, et les éléments finis dans les régions conductrices et magnétiques.

Les avantages de la méthode des intégrales de frontière sont de pouvoir modéliser facilement les domaines infinis, d'être applicable à des frontières de formes quelconques et d'obtenir une bonne qualité de la solution dans l'entrefer Ω_{fm} vu que le maillage n'est pas déformé.

Comme la méthode du macro-élément, la méthode des intégrales de frontière augmente la largeur de bande de la matrice de résolution, à cause du nombre d'inconnues à résoudre qui augmente dans l'entrefer Ω_{fm} . De plus, lorsque l'entrefer est fin, les intégrales de frontière deviennent difficiles à calculer et la fonction à intégrer peut devenir singulière.

Dans cette sous-section, le couplage de la méthode des intégrales de frontière avec la méthode des éléments finis a été étudié. Ce couplage permet d'obtenir des bonnes solutions mais les temps de calcul sont augmentés car la matrice de résolution est dense. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D et en 3D avec des éléments finis nodaux et d'arête. Cependant en 3D, les temps de calcul sont nettement augmentés, car la matrice de résolution est dense.

Dans la prochaine sous-section, une dernière méthode basée sur un entrefer volumique sera décrite, la méthode d'overlapping.

7.2.4 Overlapping

La méthode d'overlapping (ou de recouvrement) pour prendre en compte le mouvement avec un entrefer volumique est expliquée en 2D en éléments nodaux avec des quadrangles dans [Tsukerman, 1992] et des triangles dans [Lepaul *et al.*, 1999]–[Zaidi, 2012], en 2D en éléments d'arête avec des triangles dans [Zaidi, 2012], en 3D en éléments nodaux avec des hexaèdres dans [Boukari *et al.*, 2000]–[Krebs *et al.*, 2009]–[Krebs *et al.*, 2010] et avec des tétraèdres dans [Krebs *et al.*, 2009]–[Krebs *et al.*, 2010]–[Zaidi *et al.*, 2012]–[Zaidi, 2012], et en 3D en éléments d'arête avec des tétraèdres dans [Krebs *et al.*, 2011]–[Zaidi *et al.*, 2012]–[Zaidi, 2012] et des hexaèdres dans [Krebs *et al.*, 2011]. La méthode d'overlapping est représentée en 2D avec un maillage triangulaire sur la figure 7.5.

Dans la méthode d'overlapping, les maillages des domaines mobiles Ω_m et fixes Ω_f (respectivement en vert et en orange sur la figure 7.5) sont générés indépendamment. Initialement, l'entrefer volumique Ω_{fm} (en bleu sur la figure 7.5) n'est pas maillé. A chaque pas de temps, les nœuds de Γ_{m-fm} , i.e. au bord de l'entrefer volumique du côté du domaine mobile, sont projetés orthogonalement sur Γ_{f-fm} , i.e. le bord de Ω_{fm} sur le domaine fixe, et inversement. Par exemple sur la figure 7.5, le nœud N_{108} de Γ_{f-fm} est projeté sur Γ_{m-fm} en créant le nœud N_8 . De la même façon, le nœud N_{207} de Γ_{m-fm} de la figure 7.5 est projeté sur Γ_{f-fm} en créant le nœud N_7 . Cette projection génère des nœuds, des arêtes et des volumes fictifs qui se chevauchent. Les nœuds fictifs n'ont pas de degrés de liberté.

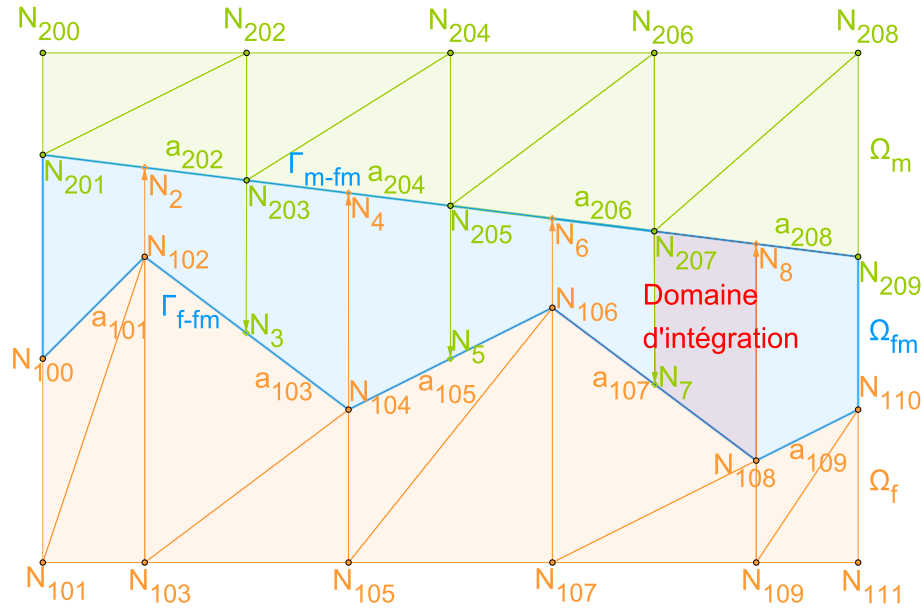


FIGURE 7.5 – Méthode d'overlapping avec un entrefer volumique Ω_{fm} entre les domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f en 2D

Les surfaces Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} de l'entrefer ne sont pas planes, donc les éléments fictifs de Ω_{fm} en 2D sont des quadrangles comme sur la figure 7.5 et en 3D des hexaèdres si le maillage est hexaédrique et des polyèdres si le maillage est tétraédrique. Donc en 3D, les surfaces constituées des nœuds réels et fictifs ne sont pas conventionnelles, elles sont alors découpées en plusieurs triangles si nécessaire. Avec ce découpage en triangle, l'entrefer volumique Ω_{fm} est rempli de prismes ou d'hexaèdres en 3D. La connexion des maillages des domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f est ensuite réalisée par le calcul des termes intégrales sur chaque quadrangle en 2D et sur chaque prisme ou hexaèdre en 3D situé dans Ω_{fm} .

En 2D en éléments nodaux, l'inconnue est interpolée à l'intérieur d'un quadrangle avec les fonctions de forme associées aux quatre nœuds situés sur Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} . Par exemple pour le domaine d'intégration en rouge sur la figure 7.5, l'inconnue est interpolée avec les fonctions de forme des nœuds N_{106} , N_{108} , N_{207} et N_{209} . En 3D en éléments nodaux, elle est interpolée à l'intérieur d'un prisme ou d'un hexaèdre avec les fonctions de forme des six nœuds ou respectivement huit nœuds de Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} . En 2D en éléments d'arête, l'inconnue est interpolée en utilisant les fonctions de forme associées aux deux arêtes situées sur Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} et aux deux arêtes verticales du quadrangle situées à l'intérieur de Ω_{fm} . Par exemple pour le domaine d'intégration en rouge sur la figure 7.5, l'inconnue est interpolée avec les fonctions de forme des arêtes constituées des nœuds N_{106} et N_{108} , N_{108} et N_8 , N_{209} et N_{207} , N_7 et N_{207} . En 3D en éléments d'arête, elle est interpolée avec les fonctions de forme associées aux six arêtes du prisme ou aux huit arêtes de l'hexaèdre de Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} et aux trois arêtes verticales du prisme ou aux quatre arêtes verticales de l'hexaèdre de l'intérieur de Ω_{fm} . Donc chaque arête de l'entrefer volumique Ω_{fm} est considérée comme une nouvelle inconnue. Le calcul des intégrales est ensuite réalisé par la méthode de quadrature de Gauss pour calculer exactement les intégrales.

L'avantage de la méthode d'overlapping est qu'elle converge et que la matrice de résolution reste creuse, symétrique, définie positive et bien conditionnée. De plus avec cette méthode, la qualité de la solution est bonne même avec un maillage irrégulier.

Cependant, la précision de l'approximation décroît quand l'épaisseur de l'entrefer augmente. Ceci peut être amélioré en développant des fonctions de forme d'ordre plus élevé. En éléments d'arête, le choix de l'épaisseur de l'entrefer Ω_{fm} est encore plus important, parce que de nouvelles inconnues sont ajoutés dans Ω_{fm} . En outre la mise en œuvre est délicate en 3D et en potentiel vecteur.

La méthode d'overlapping en éléments d'arête peut être améliorée en considérant seulement les fonctions de forme des arêtes sur le bord de l'entrefer volumique Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} , et en ne considérant pas les arêtes introduites pour construire les éléments fictifs [Krebs *et al.*, 2011]. Cette amélioration diminue le nombre de nouvelles inconnues, réduit les temps de calcul et améliore la précision de la solution.

Dans cette sous-section, la méthode d'overlapping a été détaillée. Elle obtient de bons résultats sans détériorer la matrice de résolution. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D ou en 3D et avec des éléments finis nodaux ou d'arête. La méthode est un peu plus compliquée en 3D qu'en 2D et avec des éléments d'arête qu'avec des éléments nodaux.

Toutes les méthodes présentées jusqu'à présent, le remaillage, le macro-élément, le couplage avec les intégrales de frontière et l'overlapping, ont besoin d'un entrefer volumique entre les domaines mobile et fixe. Dans la prochaine section, les méthodes étudiées auront seulement besoin d'un entrefer surfacique, appelé surface de glissement.

7.3 Méthodes basées sur une surface de glissement

Dans cette section, le domaine Ω est décomposé en sous-domaines tels que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_m$:

- Ω_f , la partie du domaine Ω fixe ;
- Ω_m , la partie du domaine Ω mobile.

L'interface des domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m est notée $\Gamma_{fm} = \Omega_f \cap \Omega_m$ et appelée *surface de glissement*. Ces domaines sont représentés sur la figure 7.6a.

Le domaine Ω est maillé comme sur la figure 7.6b. Les maillages des domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m sont respectivement notés Ω_{f_h} et Ω_{m_h} et sont libres de leur mouvement. Alors, les maillages sont non-conformes sur la surface de glissement Γ_{fm} . Donc la surface de glissement possède deux maillages : un maillage pour le domaine fixe noté Γ_{f-fm_h} et représenté en rouge sur la figure 7.6b, et un maillage pour le domaine mobile noté Γ_{m-fm_h} et représenté en noir sur la figure 7.6b.

Quatre méthodes basées sur une surface de glissement seront étudiées : le pas bloqué, les multiplicateurs de Lagrange, la connexion par interpolation et les éléments avec joints.

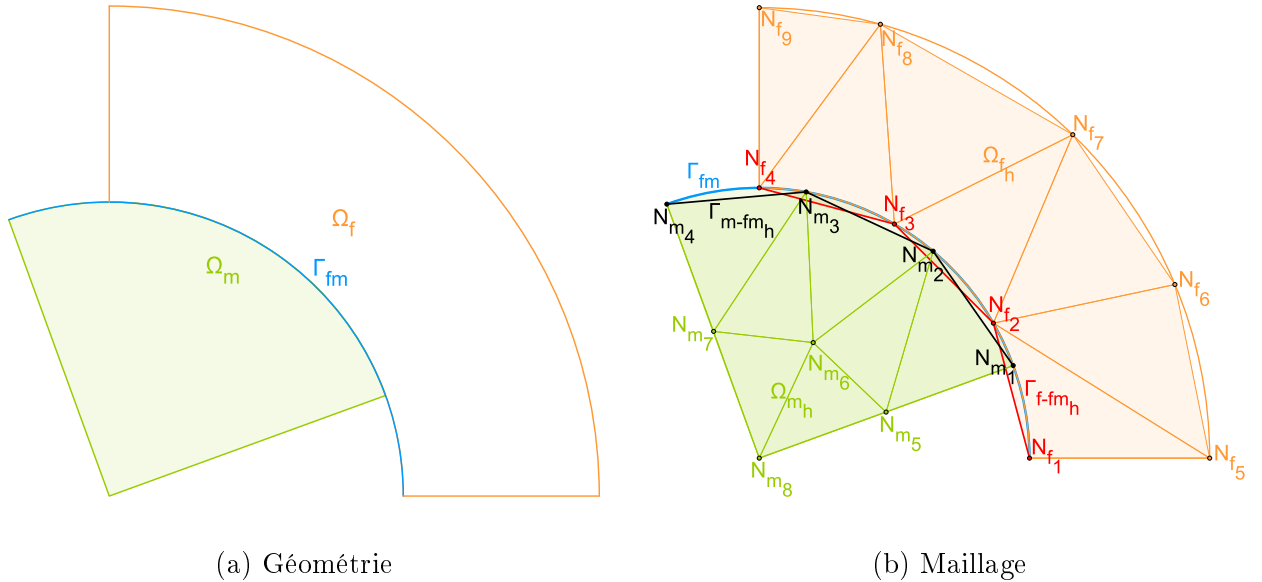


FIGURE 7.6 – Surface de glissement Γ_{fm} entre les domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f en 2D

7.3.1 Pas bloqué

Pour prendre en compte le mouvement, une méthode basée sur une surface de glissement est la méthode du pas bloqué (ou lock-step en anglais). Cette méthode est expliquée en 2D dans [Preston *et al.*, 1988] et en 3D dans [Kawase *et al.*, 1995]–[Emson *et al.*, 1998]–[Boualem et Piriou, 1998]. Elle est décrite sur la figure 7.7.

Dans la méthode du pas bloqué, un maillage régulier est généré pour le domaine Ω . Donc, les maillages des domaines fixe Ω_{f_h} et mobile Ω_{m_h} (respectivement en orange et en vert sur la figure 7.7) ne sont pas indépendants. En 2D, des lignes sont utilisées pour le maillage de la surface de glissement Γ_{fm} (en bleu sur la figure 7.7) et en 3D, ce sont des triangles et des quadrangles qui sont utilisés. Sur Γ_{fm} , les maillages des domaines mobile et fixe, Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} , sont identiques et réguliers, i.e. les éléments finis de Γ_{fm} ont tous la même longueur.

Sur la figure 7.7a, Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} sont identiques et réguliers parce que les nœuds N_{f_i} et N_{m_i} , $1 \leq i \leq 4$, sont identiques et les arêtes $N_{f_i}N_{f_{i+1}}$ et $N_{m_i}N_{m_{i+1}}$, $1 \leq i \leq 4$, ont la même longueur. La méthode du pas bloqué consiste à définir un pas de temps et une vitesse de rotation tels qu'à chaque mouvement du domaine mobile Ω_m , le maillage reste conforme, i.e. les nœuds de la surface de glissement du côté du domaine mobile Γ_{f-fm_h} et ceux du domaine fixe Γ_{m-fm_h} coïncident sur Γ_{fm} . Donc, le pas de temps dépend de la longueur des éléments du maillage sur Γ_{fm} . Alors, le maillage ne pourra jamais être dans la configuration de celui de la figure 7.6b. La figure 7.7b représente le maillage de la méthode du pas bloqué après un pas de temps. Ce maillage reste conforme, le nœud N_{m_1} est en face du nœud N_{f_2} , N_{m_2} est en face de N_{f_3} et N_{m_3} est en face de N_{f_4} . Au niveau des matrices de résolution, le seul changement à faire est de corriger la connectivité des nœuds ou des arêtes de Γ_{m-fm_h} par une permutation circulaire des inconnues.

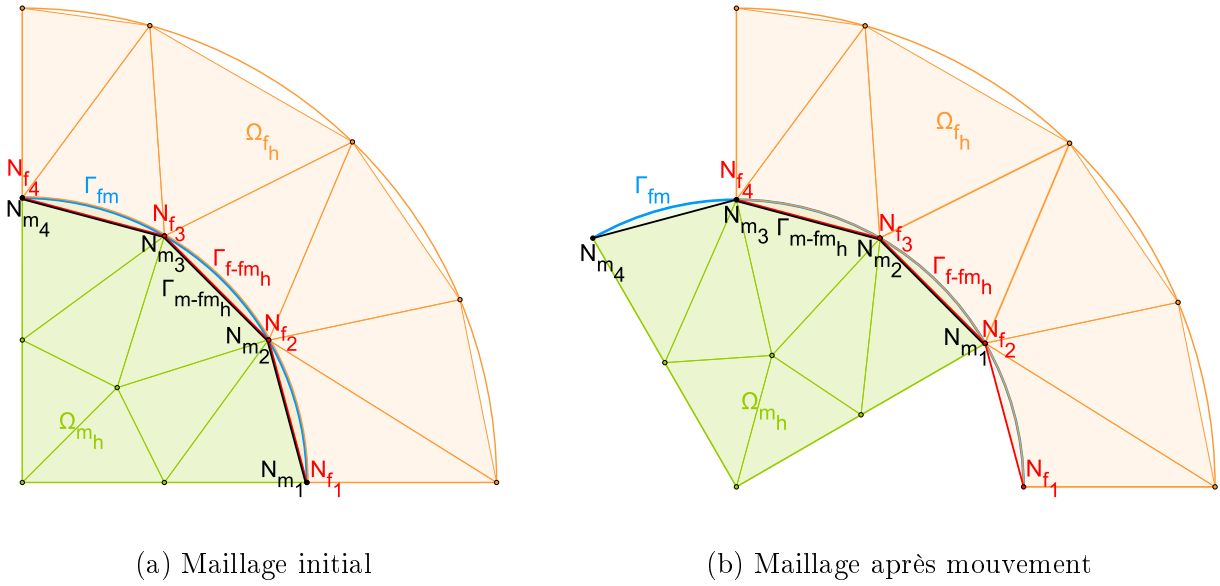


FIGURE 7.7 – Méthode du pas bloqué avec la surface de glissement Γ_{fm} entre les domaines mobile Ω_m et fixe Ω_f en 2D

Les avantages de cette méthode sont que le maillage reste conforme et qu'elle est simple à mettre en œuvre vu qu'il n'y a que des permutations des inconnues à faire. La prise en compte du mouvement n'introduit pas d'erreur numérique supplémentaire. De plus, l'utilisation de cette méthode conserve le caractère symétrique de la matrice.

L'inconvénient de la méthode du pas bloqué est que le pas de temps dépend de la vitesse de rotation et de la taille des éléments finis sur la surface de glissement.

Dans cette sous-section, la méthode du pas bloqué a été étudiée. Elle est simple à mettre en œuvre mais elle impose une contrainte sur le maillage et le pas de temps. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D ou en 3D et avec des éléments finis nodaux ou d'arête.

Dans la prochaine sous-section, une autre méthode sera décrite, la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

7.3.2 Multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte le mouvement est expliquée en 2D en éléments nodaux en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} dans [Rodger *et al.*, 1990]-

7.3. MÉTHODES BASÉES SUR UNE SURFACE DE GLISSEMENT

[Maréchal *et al.*, 1992] et en potentiel scalaire magnétique ϕ dans [Maréchal *et al.*, 1992], en 3D en éléments nodaux en \mathbf{A} dans [Maréchal, 1991] et en ϕ dans [Lai *et al.*, 1992]–[Maréchal, 1991] et en 3D en éléments d’arête en \mathbf{A} dans [Golovanov, 1997]–[Golovanov *et al.*, 1998]. Elle est aussi expliquée en 2D en éléments nodaux en \mathbf{A} dans [Antunes *et al.*, 2006] avec une comparaison avec la méthode des éléments avec joints, qui sera décrite dans la sous-section 7.3.4.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange utilise aussi une surface de glissement Γ_{fm} , maillée comme sur la figure 7.6b (le maillage peut être moins régulier). Sur chaque domaine, mobile Ω_m ou fixe Ω_f , une formulation est résolue. Entre les maillages de Γ_{fm} sur le domaine fixe, Γ_{f-fm_h} , et sur le domaine mobile, Γ_{m-fm_h} , il faut assurer la continuité des grandeurs physiques. Ici, la continuité sur Γ_{fm} est assurée par l’ajout d’un terme de couplage avec les multiplicateurs de Lagrange. Le mouvement de Ω_m induit seulement un changement du terme de couplage sur Γ_{fm} . Le terme de couplage est ajouté aux formulations des domaines Ω_f et Ω_m et correspond à une intégration surfacique sur Γ_{fm} avec les multiplicateurs de Lagrange. Lors de la résolution, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être remplacés par leurs valeurs calculées par une minimisation du système [Rodger *et al.*, 1990]–[Maréchal, 1991]–[Maréchal *et al.*, 1992]–[Lai *et al.*, 1992]–[Golovanov, 1997]–[Golovanov *et al.*, 1998], ou gardés comme inconnues du système et interpolés sur Γ_{fm} par les fonctions de forme [Golovanov, 1997].

Un avantage de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est que la matrice de résolution reste symétrique. De plus, cette méthode est générale et peut être utilisée pour n’importe quel ordre de fonctions de forme.

Cependant, la méthode des multiplicateurs de Lagrange possède plusieurs inconvénients. Premièrement, cette méthode est dépendante de la formulation choisie. Deuxièmement, la définition du domaine d’intégration des intégrales sur Γ_{fm} avec les multiplicateurs de Lagrange est difficile. En 2D, le domaine d’intégration peut être l’intersection des maillages Γ_{m-fm_h} et Γ_{f-fm_h} . En 3D, l’intersection de Γ_{m-fm_h} et de Γ_{f-fm_h} est complexe, la solution est d’utiliser le plus petit élément du maillage de Γ_{m-fm_h} et de Γ_{f-fm_h} comme domaine d’intégration et d’augmenter le nombre de points de Gauss pour intégrer sur ce domaine. Troisièmement, la matrice de résolution est non-définie positive lorsque les multiplicateurs de Lagrange sont remplacés par leurs valeurs. Quatrièmement, l’inconvénient majeur est que la matrice est singulière et mal conditionnée. A cause du mauvais conditionnement de la matrice, il est difficile de la résoudre. De nombreuses expériences numériques ont montré que la méthode des multiplicateurs de Lagrange n’est pas efficace pour des applications réelles. Cinquièmement en éléments d’arête, la méthode ne converge pas lorsque le maillage est constitué d’un mélange de tétraèdres et d’hexaèdres. Dernièrement, lorsque les perméabilités des régions étudiées sont très différentes, la solution obtenue avec les multiplicateurs de Lagrange oscille.

Dans cette sous-section, la méthode des multiplicateurs de Lagrange a été étudiée. Il est possible d’appliquer cette méthode en 2D ou en 3D et avec des éléments finis nodaux ou d’arête. La méthode est donc générale mais elle détériore le conditionnement de la matrice, ce qui rend la méthode inapplicable à des cas réels.

Dans la prochaine sous-section, une autre méthode sera décrite, la méthode de connexion par interpolation.

7.3.3 Interpolation

La méthode de connexion par interpolation pour prendre en compte le mouvement est expliquée en 2D en éléments nodaux avec des fonctions de forme du 1^{er}, du 2^{ème} et du 3^{ème} ordre dans [Shi *et al.*, 2008], en 3D en éléments nodaux avec des fonctions de forme du 1^{er} ordre dans [Perrin-Bit, 1994]–[Perrin-Bit et Coulomb, 1995]–[Dreher *et al.*, 1996], du 2^{ème} et

du 3^{ème} ordre dans [Shi *et al.*, 2006], et en 3D en éléments d'arête dans [Golovanov, 1997]–[Golovanov *et al.*, 1998].

La méthode d'interpolation consiste à connecter les maillages Γ_{m-fm_h} et Γ_{f-fm_h} , respectivement les maillages des domaines mobile Ω_{m_h} et fixe Ω_{f_h} sur la surface de glissement Γ_{fm} . Ces maillages sont représentés sur la figure 7.6b. En éléments nodaux, l'interpolation permet d'assurer la continuité des inconnues nodales à travers la surface de glissement Γ_{fm} . En éléments d'arête, elle permet d'assurer la continuité de la composante tangentielle des inconnues d'arête à travers Γ_{fm} . Pour chaque inconnue nodale ou d'arête de Γ_{m-fm_h} , la méthode détecte l'élément linéique en 2D et surfacique en 3D de Γ_{f-fm_h} qui se trouve en face de l'inconnue. Alors l'inconnue de Γ_{m-fm_h} est connectée aux inconnues de l'élément de Γ_{f-fm_h} par une combinaison linéaire avec les fonctions de forme des nœuds ou des arêtes de l'élément. Le nombre de connexions d'une inconnue de Γ_{m-fm_h} à des inconnues de Γ_{f-fm_h} dépend de l'ordre des fonctions de forme. Puis, l'inconnue de Γ_{m-fm_h} est substituée par la combinaison linéaire dans la matrice de résolution.

Un exemple de la méthode d'interpolation du 1^{er} ordre peut être donné en 2D en éléments nodaux pour le nœud N_{m_2} de la figure 7.6b. Par cette méthode, l'inconnue du nœud N_{m_2} , appartenant au domaine mobile Ω_{m_h} , sera exprimée par une combinaison linéaire des inconnues des nœuds N_{f_2} et N_{f_3} , appartenant au domaine fixe Ω_{f_h} , avec les fonctions de forme nodales du 1^{er} ordre.

De plus en éléments d'arête, il faut découper les arêtes de Γ_{m-fm_h} en respectant le maillage de Γ_{f-fm_h} . La méthode d'interpolation est difficile à mettre en œuvre en éléments d'arête sauf dans le cas d'un maillage régulier.

L'avantage de la méthode d'interpolation est que la matrice de résolution reste creuse, de plus elle est symétrique et bien conditionnée, sa largeur de bande n'est pas augmentée.

Le premier inconvénient de cette méthode est que la continuité est seulement assurée en moyenne, puisque si les maillages Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} de part et d'autre de Γ_{fm} sont de tailles d'éléments surfaciques fortement hétérogènes, certaines inconnues ne seront pas connectées. En éléments d'arête, un deuxième inconvénient est que les fonctions de forme d'arête utilisées pour l'interpolation sont limitées au 1^{er} ordre incomplet. Un dernier inconvénient est que les arêtes de Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} doivent être découpées, sauf si le maillage est régulier.

Dans cette sous-section, la méthode d'interpolation a été étudiée. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D ou en 3D et avec des éléments finis nodaux ou d'arête. En éléments nodaux, la méthode donne des bons résultats sans détériorer le conditionnement de la matrice. En revanche en éléments d'arête, la méthode est difficile à mettre en œuvre. Donc, cette méthode est utilisable en éléments nodaux, mais plus difficilement en éléments d'arête.

Dans la prochaine sous-section, une autre méthode sera décrite, la méthode des éléments avec joints.

7.3.4 Éléments avec joints

La méthode des éléments avec joints (ou mortar method en anglais) pour prendre en compte le mouvement est étudiée dans la thèse de F. Rapetti [Rapetti, 2000], consacrée à cette méthode, en 2D et en 3D et en éléments nodaux et d'arête. Elle est aussi décrite en 2D en éléments nodaux dans [Rapetti *et al.*, 2000b]–[Buffa *et al.*, 2000]–[Buffa *et al.*, 2001b]–[Antunes *et al.*, 2005]–[Shi, 2005]–[Antunes *et al.*, 2006]–[Shi *et al.*, 2008], en 2D en éléments d'arête dans [Rapetti *et al.*, 2000a]–[Rapetti, 2001], en 3D en éléments nodaux dans [Shi, 2005] et en 3D en éléments d'arête dans [Buffa *et al.*, 2000]–[Buffa *et al.*, 2001a]–[Rapetti *et al.*, 2002]–[Bouillault *et al.*, 2003]. De plus en 2D en éléments nodaux, cette méthode est comparée à

7.3. MÉTHODES BASÉES SUR UNE SURFACE DE GLISSEMENT

d'autres méthodes détaillées dans les sous-sections précédentes. Elle est comparée à la méthode de la bande de mouvement de la sous-section 7.2.1 dans [Antunes *et al.*, 2005], à la méthode des multiplicateurs de Lagrange de la sous-section 7.3.2 dans [Antunes *et al.*, 2006], et à la méthode d'interpolation de la sous-section 7.3.3 avec des fonctions de forme d'ordre élevé dans [Shi *et al.*, 2008]. L'article [Antunes *et al.*, 2005] étudie aussi la méthode des éléments avec joints avec des fonctions de forme hiérarchiques.

Dans la méthode des éléments avec joints, la résolution d'un problème dans le domaine Ω est équivalent à la résolution de sous-problèmes dans les domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m , qui en plus satisfont des conditions de continuité sur la surface de glissement Γ_{fm} imposées faiblement par les multiplicateurs de Lagrange. En éléments nodaux, les multiplicateurs de Lagrange imposent la continuité de l'inconnue à travers Γ_{fm} , alors qu'en éléments d'arête, ils imposent la continuité de la composante tangentielle de l'inconnue. Les inconnues sur les maillages de Γ_{fm} des côtés fixe et mobile, respectivement Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} , sont reliées entre elles par les conditions de continuité, traduites en matrice de couplage C et D en remplaçant le multiplicateur de Lagrange par des fonctions de forme comme dans la méthode de Galerkin. Alors que dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange décrite dans la sous-section 7.3.2, le multiplicateur de Lagrange est soit ajouté aux inconnues du système, soit remplacé par sa valeur calculée par une minimisation. Les matrices de couplage C et D dépendent de l'intégration sur Γ_{fm} des fonctions de forme nodales en éléments nodaux et d'arête en éléments d'arête. De plus, la matrice C dépend seulement des fonctions de forme sur Γ_{f-fm_h} , alors que D dépend des fonctions de forme sur Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} . Ces matrices de couplage doivent être recalculées à chaque mouvement de Ω_m .

Les avantages de la méthode des éléments avec joints sont que les résultats sont très précis, que la matrice du système final n'est pas augmentée, et que cette matrice est symétrique, définie positive et globalement creuse.

Cependant, la matrice du système est globalement creuse mais pas de partout. Le caractère creux de la matrice est seulement gardé pour les inconnues qui ne sont pas sur la surface de glissement. Pour les inconnues qui sont sur Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} , la matrice est pleine. Ces changements conduisent à une augmentation des temps de calcul et de la mémoire par rapport à un maillage conforme.

Dans cette sous-section, la méthode des éléments avec joints a été étudiée. Il est possible d'appliquer cette méthode en 2D ou en 3D et avec des éléments finis nodaux ou d'arête. Cette méthode donne des très bons résultats en augmentant légèrement les temps de calcul.

Dans la prochaine section, le choix de la méthode de prise en compte sera effectué.

7.4 Conclusion

Prise en compte du mouvement	Dimensions		Éléments		Solution obtenue	Contraintes maillage
	2D	3D	Nodaux	D'arête		
Remaillage	✓	✗	✓	✓	✗	✓
Macro-élément	✓	✗	✓	✗	✓	✓
Intégrales de frontière	✓	✗	✓	✓	✓	✓
Overlapping	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pas bloqué	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Multiplicateurs de Lagrange	✗	✗	✗	✗	✓	✓
Interpolation	✓	✓	✓	✗	✓	✓
Éléments avec joints	✓	✓	✓	✓	✓	✓

TABLEAU 7.1 – Récapitulatif des méthodes de prise en compte du mouvement

Cet état de l'art des méthodes de prise en compte du mouvement, récapitulé dans le tableau 7.1, va permettre de faire un choix. Il faut que la méthode choisie puisse être réalisée en 3D et en éléments d'arête et permette d'obtenir de bons résultats sans contraintes sur le pas de temps et le maillage.

Quatre méthodes basées sur un entrefer volumique ont été étudiées. Premièrement, la méthode de remaillage peut être utilisée en éléments d'arête, mais elle est difficilement applicable en 3D et la solution obtenue est perturbée. Deuxièmement, la méthode du macro-élément est difficilement applicable en 3D à cause de sa matrice de résolution dense et n'a jamais été appliquée en éléments d'arête. Troisièmement, la méthode de couplage avec les intégrales de frontière est difficilement applicable en 3D pour les mêmes raisons que la méthode du macro-élément. Dernièrement, la méthode d'overlapping est applicable en 3D et en éléments d'arête avec une solution de bonne qualité et sans contraintes entre le pas de temps et la taille des éléments du maillage.

Quatre autres méthodes basées sur une surface de glissement ont aussi été étudiées. Premièrement, la méthode du pas bloqué peut être réalisée en 3D et en éléments d'arête avec une solution de bonne qualité, mais les pas de temps dépendent de la taille des éléments finis. Deuxièmement, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne peut pas être appliquée sur un cas réel en 3D et en éléments d'arête à cause du mauvais conditionnement de la matrice de résolution. Troisièmement, la méthode d'interpolation est applicable en 3D, mais difficilement avec des éléments d'arête. Dernièrement, la méthode des éléments avec joints respecte tous nos critères de méthodes pour prendre en compte le mouvement.

Finalement, deux méthodes peuvent être réalisées en 3D et en éléments d'arête et permettent d'obtenir de bons résultats sans contraintes sur le pas de temps et le maillage : l'overlapping et les éléments avec joints.

La méthode d'overlapping a été développée dans un premier temps pour des éléments nodaux avec des quadrangles et des triangles en 2D et des hexaèdres en 3D. Dans un second temps, la méthode a été modifiée pour prendre en compte des tétraèdres et des prismes en 3D. Dans un troisième temps, elle a pris en compte les entrefers volumiques non plans. Dans un quatrième temps, la méthode a été mise en œuvre pour des éléments d'arête. Finalement, la méthode d'overlapping a été modifiée au cours de son développement pour prendre en compte plusieurs cas particuliers. Cette méthode n'est pas générique et donc difficile à mettre en œuvre.

7.4. CONCLUSION

La méthode des éléments avec joints est une méthode générique s'utilisant en 2D et en 3D avec des éléments nodaux et d'arête. Donc cette méthode est plus facile à mettre en œuvre.

Finalement la méthode des éléments avec joints est choisie parce qu'elle est générique pour les dimensions deux et trois et les éléments nodaux et d'arête.

Dans le prochain chapitre, la méthode des éléments avec joints ainsi que l'implémentation de la méthode seront détaillées.

Chapitre 8

Méthode des éléments avec joints

Sommaire

8.1	Description de la méthode des éléments avec joints	180
8.1.1	Matrices de couplage	180
8.1.1.1	En éléments nodaux	180
8.1.1.2	En éléments d'arête	182
8.1.1.2.1	En 2D	182
8.1.1.2.2	En 3D	183
8.1.1.3	Récapitulatif	184
8.1.2	Système matriciel à résoudre avec les matrices de couplage	185
8.2	Implémentation de la méthode des éléments avec joints	187
8.2.1	Domaine d'intégration des matrices de couplage	187
8.2.1.1	En 2D	187
8.2.1.2	En 3D	188
8.2.1.3	Récapitulatif	188
8.2.2	Intégration des termes des matrices de couplage	188
8.2.2.1	En 2D	188
8.2.2.1.1	En éléments nodaux	189
8.2.2.1.2	En éléments d'arête	190
8.2.2.2	En 3D	190
8.2.2.2.1	En éléments nodaux	191
8.2.2.2.2	En éléments d'arête	192
8.2.2.3	Récapitulatif	192
8.2.3	Inversion de la matrice de couplage C	192
8.2.3.1	En éléments nodaux	193
8.2.3.2	En éléments d'arête	195
8.2.4	Conclusion	196

Dans ce chapitre, la méthode des éléments avec joints, choisie grâce à l'état de l'art des méthodes de prise en compte du mouvement, sera décrite plus en détail que dans la sous-section 7.3.4.

8.1 Description de la méthode des éléments avec joints

Les notations utilisées dans cette section sont les mêmes que pour les méthodes de prise en compte du mouvement basées sur une surface de glissement, décrites dans la section 7.3. Soit Ω le domaine d'étude. Ce domaine Ω est divisé en deux sous-domaines : le domaine fixe Ω_f , parfois nommé stator, et le domaine mobile Ω_m , parfois nommé rotor. L'interface entre les deux domaines Ω_f et Ω_m est nommée surface de glissement et notée Γ_{fm} . Le mouvement considéré pour Ω_m sera une rotation sur Γ_{fm} .

La géométrie de l'interface Γ_{fm} (les nœuds et les arêtes en 2D, plus les facettes en 3D) est dédoublée en Γ_{f-fm} pour le domaine fixe Ω_f et en Γ_{m-fm} pour le domaine mobile Ω_m .

Le domaine Ω est maillé et noté Ω_h , donc les domaines Ω_f et Ω_m sont maillés et respectivement noté Ω_{fh} et Ω_{mh} . De même, les interfaces Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} sont maillées et respectivement notées Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} .

Lorsque le rotor se met en mouvement, les maillages Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} deviennent non-conformes, c'est-à-dire que les nœuds de Γ_{m-fm_h} ne sont plus en face de ceux de Γ_{f-fm_h} . Cependant, il faut conserver la continuité des variables entre les domaines Ω_m et Ω_f . La méthode des éléments avec joints utilise les multiplicateurs de Lagrange pour imposer la continuité des variables sur l'interface Γ_{fm} .

8.1.1 Matrices de couplage

8.1.1.1 En éléments nodaux

Soit X l'inconnue en éléments nodaux de la formulation. La méthode des éléments avec joints consiste à imposer la continuité de l'inconnue X entre la partie fixe Ω_f et la partie mobile Ω_m à travers l'interface Γ_{fm} , à l'aide du multiplicateur de Lagrange X' avec la condition telle que :

$$\int_{\Gamma_{fm}} X' \left(X|_{\Gamma_{f-fm}} - X|_{\Gamma_{m-fm}} \right) d\Gamma = 0. \quad (8.1)$$

Soit n_N le nombre de nœuds du maillage Ω_h . Soient $n_{N_{\Omega_f}}$ et $n_{N_{\Omega_m}}$ le nombre de nœuds des maillages respectifs Ω_{fh} et Ω_{mh} tels que :

$$n_N = n_{N_{\Omega_f}} + n_{N_{\Omega_m}}. \quad (8.2)$$

Deux parties de chaque maillage Ω_{fh} et Ω_{mh} doivent être considérées : le maillage sur le bord du domaine, respectivement Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} , et le maillage à l'intérieur du domaine, respectivement $\Omega_{fh} \setminus \Gamma_{f-fm_h}$ et $\Omega_{mh} \setminus \Gamma_{m-fm_h}$. Alors soient $n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}$, $n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}$, $n_{N_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}}}$ et $n_{N_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}}}$ le nombre de nœuds des maillages respectifs Γ_{f-fm_h} , Γ_{m-fm_h} , Ω_{fh} sans l'interface Γ_{f-fm_h} et Ω_{mh} sans l'interface Γ_{m-fm_h} tels que :

$$n_{N_{\Omega_f}} = n_{N_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}}} + n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}, \quad (8.3)$$

$$n_{N_{\Omega_m}} = n_{N_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}}} + n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}. \quad (8.4)$$

8.1. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS

La fonction de forme nodale du $i^{\text{ème}}$ nœud est notée w_{n_i} . Soient $w_{n_{f_i}}, 1 \leq i \leq n_{N_{\Omega_f}}$, et $w_{n_{m_k}}, 1 \leq k \leq n_{N_{\Omega_m}}$, les fonctions de forme nodales respectivement des domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m . L'inconnue X est décomposé sur les éléments finis du domaine Ω_h telle que :

$$X = \sum_{i=1}^{n_{N_{\Omega_f} \setminus \Gamma_{f-fm}}} X_{n_{f_i}} w_{n_{f_i}} + \sum_{j=1}^{n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}} X_{n_{f_j}} w_{n_{f_j}} + \sum_{k=1}^{n_{N_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}}}} X_{n_{m_k}} w_{n_{m_k}} + \sum_{l=1}^{n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}} X_{n_{m_l}} w_{n_{m_l}}. \quad (8.5)$$

avec

- $X_{n_{f_i}}$ la valeur de X sur le nœud n_{f_i} de $\Omega_{f_h} \setminus \Gamma_{f-fm_h}$,
- $X_{n_{f_j}}$ la valeur de X sur le nœud n_{f_j} de Γ_{f-fm_h} ,
- $X_{n_{m_k}}$ la valeur de X sur le nœud n_{m_k} de $\Omega_{m_h} \setminus \Gamma_{m-fm_h}$,
- $X_{n_{m_l}}$ la valeur de X sur le nœud n_{m_l} de Γ_{m-fm_h} .

Avec la décomposition de X sur les éléments finis (8.5), la condition de continuité (8.1) devient :

$$\sum_{j=1}^{n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}} X_{n_{f_j}} \int_{\Gamma_{fm}} X' w_{n_{f_j}} d\Gamma = \sum_{l=1}^{n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}} X_{n_{m_l}} \int_{\Gamma_{fm}} X' w_{n_{m_l}} d\Gamma. \quad (8.6)$$

Avec la méthode de Galerkin, le multiplicateur de Lagrange X' est choisi comme la fonction de forme nodale du côté fixe de l'interface, $w_{n_{f_p}}, 1 \leq p \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}$; le domaine fixe Ω_f est alors défini comme le *maître* et le domaine mobile Ω_m comme l'*esclave*. Donc, la condition de continuité (8.6) est mise sous forme matricielle telle que :

$$C_n \mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm} \mathbf{n}} = D_n \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm} \mathbf{n}}, \quad (8.7)$$

avec

- $C_n = [c_n(p, j)]_{1 \leq p, j \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}} = \left[\int_{\Gamma_{f-fm}} w_{n_{f_p}} w_{n_{f_j}} d\Gamma \right]_{1 \leq p, j \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}}$ une matrice de couplage ;
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm} \mathbf{n}} = [X_{n_{f_j}}]_{1 \leq j \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}}$ le vecteur des valeurs de X sur tous les nœuds de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} ;
- $D_n = [d_n(p, l)]_{\substack{1 \leq p \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}}} = \left[\int_{\Gamma_{fm}} w_{n_{f_p}} w_{n_{m_l}} d\Gamma \right]_{\substack{1 \leq p \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}}}$ une matrice de couplage ;
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm} \mathbf{n}} = [X_{n_{m_l}}]_{1 \leq l \leq n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}}$ le vecteur des valeurs de X sur tous les nœuds de l'interface du côté mobile Γ_{m-fm_h} .

Dans l'équation (8.7), les fonctions de forme nodales $w_{n_{f_j}}$ et $w_{n_{f_p}}$ sont définies sur l'interface du côté fixe Γ_{f-fm} , alors que la fonction de forme $w_{n_{m_l}}$ est définie sur l'interface du côté mobile Γ_{m-fm} . La matrice de couplage C_n intègre seulement des fonctions de forme sur Γ_{f-fm} , alors l'intégration des termes de C_n est faite sur Γ_{f-fm} au lieu de Γ_{fm} . De plus, la matrice C_n est définie seulement sur la surface fixe Γ_{f-fm} pour éviter de la recalculer à chaque mouvement du domaine mobile Ω_m . En outre, elle est carrée de dimension $n_{N_{\Gamma_{f-fm}}} \times n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}$ alors que la matrice de couplage D_n est rectangulaire de dimension $n_{N_{\Gamma_{f-fm}}} \times n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}$.

Dans ce paragraphe, les matrices de couplage C_n et D_n ont été décrites en éléments nodaux. Dans le prochain paragraphe, les matrices de couplage seront décrites en éléments d'arête.

8.1.1.2 En éléments d'arête

Soit \mathbf{X} l'inconnue en éléments d'arête de la formulation. La méthode des éléments avec joints consiste à imposer la continuité de la composante tangentielle de l'inconnue \mathbf{X} entre la partie fixe Ω_f et la partie mobile Ω_m à travers l'interface Γ_{fm} à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Cependant la composante tangentielle de l'inconnue \mathbf{X} est définie différemment en 2D et en 3D.

La composante normale de l'inconnue \mathbf{X} est $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}$ et sa composante tangentielle est $(\mathbf{n} \times \mathbf{X}) \times \mathbf{n}$ telles que :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{X}) \times \mathbf{n}. \quad (8.8)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal. En 2D, le vecteur unitaire tangent \mathbf{t} est introduit pour la composante tangentielle de l'inconnue \mathbf{X} tel que :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{n} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{t}. \quad (8.9)$$

Donc en 2D, l'inconnue \mathbf{X} sera décomposée en composantes normale et tangentielle avec l'équation (8.9) et en 3D avec l'équation (8.8).

Donc avec des éléments d'arête, les matrices de couplage C et D seront détaillées dans un premier temps en 2D et dans un second temps en 3D.

8.1.1.2.1 En 2D

En 2D avec des éléments d'arête, la continuité de la composante tangentielle de l'inconnue \mathbf{X} (8.9) à travers Γ_{fm} est imposée avec le multiplicateur de Lagrange X' telle que :

$$\int_{\Gamma_{fm}} X' \left(\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}|_{\Gamma_{f-fm}} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{X}|_{\Gamma_{m-fm}} \right) d\Gamma = 0. \quad (8.10)$$

Soient $n_{A\Omega_f}$ et $n_{A\Omega_m}$ le nombre d'arêtes des maillages respectifs Ω_{f_h} et Ω_{m_h} tels que :

$$n_A = n_{A\Omega_f} + n_{A\Omega_m}. \quad (8.11)$$

Comme en éléments nodaux, deux parties des maillages Ω_{f_h} et Ω_{m_h} doivent être considérées : le maillage sur le bord du domaine, respectivement Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} , et le maillage à l'intérieur du domaine, respectivement $\Omega_{f_h} \setminus \Gamma_{f-fm_h}$ et $\Omega_{m_h} \setminus \Gamma_{m-fm_h}$. Soient $n_{A\Gamma_{f-fm}}$, $n_{A\Gamma_{m-fm}}$, $n_{A\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}}$ et $n_{A\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}}$ le nombre d'arêtes des maillages respectifs Γ_{f-fm_h} , Γ_{m-fm_h} , Ω_{f_h} sans l'interface Γ_{f-fm_h} et Ω_{m_h} sans l'interface Γ_{m-fm_h} tels que :

$$n_{A\Omega_f} = n_{A\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} + n_{A\Gamma_{f-fm}}, \quad (8.12)$$

$$n_{A\Omega_m} = n_{A\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} + n_{A\Gamma_{m-fm}}. \quad (8.13)$$

Soient $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{f_i}}$, $1 \leq i \leq n_{A\Omega_f}$, et $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_{m_k}}$, $1 \leq k \leq n_{A\Omega_m}$, les fonctions de forme d'arête respectivement des domaines fixe Ω_f et mobile Ω_m . L'inconnue \mathbf{X} est décomposée sur les éléments finis du domaine Ω_h telle que :

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n_{A\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}}} X_{a_{f_i}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{f_i}} + \sum_{j=1}^{n_{A\Gamma_{f-fm}}} X_{a_{f_j}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{f_j}} + \sum_{k=1}^{n_{A\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}}} X_{a_{m_k}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{m_k}} + \sum_{l=1}^{n_{A\Gamma_{m-fm}}} X_{a_{m_l}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{m_l}}. \quad (8.14)$$

avec

– $X_{a_{f_i}}$ la circulation de \mathbf{X} sur l'arête a_{f_i} de $\Omega_{f_h} \setminus \Gamma_{f-fm_h}$,

8.1. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS

- $X_{a_{f_j}}$ la circulation de \mathbf{X} sur l'arête a_{f_j} de Γ_{f-fm_h} ,
- $X_{a_{m_k}}$ la circulation de \mathbf{X} sur l'arête a_{m_k} de $\Omega_{m_h} \setminus \Gamma_{m-fm_h}$,
- $X_{a_{m_l}}$ la circulation de \mathbf{X} sur l'arête a_{m_l} de Γ_{m-fm_h} .

Avec la décomposition de \mathbf{X} sur les éléments finis (8.14), la condition de continuité (8.10) devient :

$$\sum_{j=1}^{n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} X_{a_{f_j}} \int_{\Gamma_{fm}} X' (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{f_j}}) d\Gamma = \sum_{l=1}^{n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}} X_{a_{m_l}} \int_{\Gamma_{fm}} X' (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{m_l}}) d\Gamma. \quad (8.15)$$

Avec la méthode de Galerkin, le multiplicateur de Lagrange X' est choisi comme la composante tangentielle de la fonction de forme d'arête du côté fixe de l'interface $\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{f_p}}$, $1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}$; le domaine fixe Ω_f est alors le maître et le domaine mobile Ω_m l'esclave. Donc, la condition de continuité (8.15) est mise sous forme matricielle telle que :

$$C_{a_2} \mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}\mathbf{a}} = D_{a_2} \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}\mathbf{a}}, \quad (8.16)$$

avec

- $C_{a_2} = [c_{a_2}(p, j)]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} = \left[\int_{\Gamma_{f-fm}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{f_p}}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{f_j}}) d\Gamma \right]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}}$ une matrice de couplage ;
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}\mathbf{a}} = [X_{a_{f_j}}]_{1 \leq j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}}$ le vecteur des circulations de \mathbf{X} sur toutes les arêtes de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} ;
- $D_{a_2} = [d_{a_2}(p, l)]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}} = \left[\int_{\Gamma_{fm}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{f_p}}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{m_l}}) d\Gamma \right]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}}$ une matrice de couplage ;
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}\mathbf{a}} = [X_{a_{m_l}}]_{1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}$ le vecteur des circulations de \mathbf{X} sur toutes les arêtes de l'interface du côté mobile Γ_{m-fm_h} .

Dans l'équation (8.16), les fonctions de forme d'arête $\mathbf{w}_{a_{f_j}}$ et $\mathbf{w}_{a_{f_p}}$ sont définies sur l'interface du côté fixe Γ_{f-fm} , alors que la fonction de forme $\mathbf{w}_{a_{m_l}}$ est définie sur l'interface du côté mobile Γ_{m-fm} . La matrice de couplage C_{a_2} intègre seulement des fonctions de forme sur Γ_{f-fm} , alors l'intégration des termes de C_{a_2} est faite sur Γ_{f-fm} au lieu de Γ_{fm} . De plus, la matrice C_{a_2} est définie seulement sur la surface fixe Γ_{f-fm} pour éviter de la recalculer à chaque mouvement du domaine mobile Ω_m . En outre, elle est carrée de dimension $n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \times n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}$ alors que la matrice de couplage D_{a_2} est rectangulaire de dimension $n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \times n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}$.

En éléments d'arête, la méthode des éléments avec joints impose la continuité de la composante tangentielle de l'inconnue par les multiplicateurs de Lagrange. Cependant, la composante tangentielle est calculée différemment en 2D (8.9) et en 3D (8.8). Dans ce paragraphe, la méthode des éléments avec joints a été décrite en 2D et en éléments d'arête avec la composante tangentielle définie par (8.9). Dans le prochain paragraphe, la méthode des éléments avec joints sera étudiée en 3D et en éléments d'arête avec la composante tangentielle définie par (8.8).

8.1.1.2.2 En 3D

En 3D avec des éléments d'arête, la continuité de la composante tangentielle de l'inconnue \mathbf{X} (8.8) à travers Γ_{fm} est imposée avec le multiplicateur de Lagrange \mathbf{X}' telle que :

$$\int_{\Gamma_{fm}} \mathbf{X}' \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{X}|_{\Gamma_{f-fm}} - \mathbf{n} \times \mathbf{X}|_{\Gamma_{m-fm}}) d\Gamma = 0. \quad (8.17)$$

Avec la décomposition de \mathbf{X} sur les éléments finis (8.14), la condition de continuité (8.17) devient :

$$\sum_{j=1}^{n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} X_{a_{fj}} \int_{\Gamma_{fm}} \mathbf{X}' \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fj}}) d\Gamma = \sum_{l=1}^{n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}} X_{a_{ml}} \int_{\Gamma_{fm}} \mathbf{X}' \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{ml}}) d\Gamma. \quad (8.18)$$

Avec la méthode de Galerkin, le multiplicateur de Lagrange \mathbf{X}' est choisi comme la composante tangentielle de la fonction de forme d'arête du côté fixe de l'interface, $\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fp}}$, $1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}$; le domaine fixe Ω_f est alors le maître et le domaine mobile Ω_m l'esclave. Donc, la condition de continuité (8.18) est mise sous forme matricielle telle que :

$$C_{a3} \mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}\mathbf{a}} = D_{a3} \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}\mathbf{a}}, \quad (8.19)$$

avec

- $C_{a3} = [c_{a3}(p, j)]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} = \left[\int_{\Gamma_{f-fm}} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fp}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fj}}) d\Gamma \right]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}}$ une matrice de couplage ;
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}\mathbf{a}} = [X_{a_{fj}}]_{1 \leq j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}}$ le vecteur des circulations de \mathbf{X} sur toutes les arêtes de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} ;
- $D_{a3} = [d_{a3}(p, l)]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}} = \left[\int_{\Gamma_{fm}} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fp}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{ml}}) d\Gamma \right]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}}$ une matrice de couplage ;
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}\mathbf{a}} = [X_{a_{ml}}]_{1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}$ le vecteur des circulations de \mathbf{X} sur toutes les arêtes de l'interface du côté mobile Γ_{m-fm_h} .

Dans l'équation (8.19), les fonctions de forme d'arête $\mathbf{w}_{a_{fj}}$ et $\mathbf{w}_{a_{fp}}$ sont définies sur l'interface du côté fixe Γ_{f-fm} , alors que la fonction de forme $\mathbf{w}_{a_{ml}}$ est définie sur l'interface du côté mobile Γ_{m-fm} . La matrice de couplage C_{a3} intègre seulement des fonctions de forme sur Γ_{f-fm} , alors l'intégration des termes de C_{a3} est faite sur Γ_{f-fm} au lieu de Γ_{fm} . De plus, la matrice C_{a3} est définie seulement sur la surface fixe Γ_{f-fm} pour éviter de la recalculer à chaque mouvement du domaine mobile Ω_m . En outre, elle est carrée de dimension $n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \times n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}$ alors que la matrice de couplage D_{a3} est rectangulaire de dimension $n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \times n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}$.

8.1.1.3 Récapitulatif

Dans les paragraphes précédents, des matrices de couplage entre les inconnues sur Γ_{f-fm} et Γ_{m-fm} ont été déduites de la condition de continuité à l'interface Γ_{fm} en éléments nodaux, C_n et D_n , et en éléments d'arête en 2D, C_{a2} et D_{a2} , et en 3D, C_{a3} et D_{a3} . Toutes ces conditions de continuité (8.7)–(8.16)–(8.19) peuvent être écrites sous la même forme telle que :

$$C \mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}} = D \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}}, \quad (8.20)$$

avec

- C et D les matrices de couplage,
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}}$ le vecteur des inconnues sur le maillage de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} ,
- $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}}$ le vecteur des inconnues sur le maillage de l'interface du côté mobile Γ_{m-fm_h} .

8.1. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS

En éléments nodaux, les matrices de couplage C et D (8.7) sont calculées telle que :

$$C = C_n = [c_n(p, j)]_{1 \leq p, j \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}} = \left[\int_{\Gamma_{f-fm}} w_{n_{fp}} w_{n_{fj}} d\Gamma \right]_{1 \leq p, j \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}}, \quad (8.21a)$$

$$D = D_n = [d_n(p, l)]_{\substack{1 \leq p \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}}} = \left[\int_{\Gamma_{fm}} w_{n_{fp}} w_{n_{ml}} d\Gamma \right]_{\substack{1 \leq p \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{N_{\Gamma_{m-fm}}}}}. \quad (8.21b)$$

Puis en 2D avec des éléments d'arête, les matrices de couplage C et D (8.16) sont calculées telle que :

$$C = C_{a_2} = [c_{a_2}(p, j)]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} = \left[\int_{\Gamma_{f-fm}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{fp}}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{fj}}) d\Gamma \right]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} \quad (8.22a)$$

$$D = D_{a_2} = [d_{a_2}(p, l)]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}} = \left[\int_{\Gamma_{fm}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{fp}}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{ml}}) d\Gamma \right]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}} \quad (8.22b)$$

Enfin en 3D avec des éléments d'arête, les matrices de couplage C et D (8.19) sont calculées telles que :

$$C = C_{a_3} = [c_{a_3}(p, j)]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} = \left[\int_{\Gamma_{f-fm}} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fp}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fj}}) d\Gamma \right]_{1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} \quad (8.23a)$$

$$D = D_{a_3} = [d_{a_3}(p, l)]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}} = \left[\int_{\Gamma_{fm}} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{fp}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{a_{ml}}) d\Gamma \right]_{\substack{1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}} \\ 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}}} \quad (8.23b)$$

Dans cette sous-section, les matrices de couplage C et D ont été décrites en éléments nodaux (8.21), en éléments d'arête en 2D (8.22) et en 3D (8.23). Ces matrices C et D relient les inconnues sur l'interface des côtés fixe Γ_{f-fm} et mobile Γ_{m-fm} (8.20). Donc dans la prochaine sous-section, le système matriciel pour déterminer les inconnues sera réduit en prenant en compte la condition (8.20) entre les inconnues sur l'interface Γ_{fm} .

8.1.2 Système matriciel à résoudre avec les matrices de couplage

La résolution sur le domaine Ω de n'importe quelle formulation en éléments nodaux ou d'arête et en 2D ou en 3D consiste à résoudre un système matriciel tel que :

$$R_{\Omega} \mathbf{X}_{\Omega} = \mathbf{M}_{\Omega}, \quad (8.24)$$

avec

- R_{Ω} la matrice de rigidité sur le domaine Ω composée des opérations différentielles des fonctions de forme,
- \mathbf{X}_{Ω} le vecteur des inconnues du système sur le domaine Ω ,
- \mathbf{M}_{Ω} le vecteur source sur le domaine Ω .

Ce système matriciel (8.24) est résolu sur le maillage Ω_h , mais il peut être écrit par bloc pour les maillages indépendants des domaines fixe Ω_{f_h} et mobile Ω_{m_h} tel que :

$$\begin{bmatrix} R_{\Omega_f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_{\Omega_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Omega_f} \\ \mathbf{X}_{\Omega_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\Omega_f} \\ \mathbf{M}_{\Omega_m} \end{bmatrix}, \quad (8.25)$$

avec $\mathbf{0}$ une matrice remplie de 0.

La condition de couplage (8.20) permet de relier les inconnues sur l'interface du côté fixe Γ_{f-fm} , $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}}$, aux inconnues sur l'interface du côté mobile Γ_{m-fm} , $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}}$, grâce aux matrices de couplage C et D . Alors, le système matriciel (8.25) doit encore être découpé en sous-blocs : Ω_f est découpé en $\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}$ et Γ_{f-fm} , et Ω_m en $\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}$ et Γ_{m-fm} . Cependant les maillages des sous-blocs des domaines Ω_f et Ω_m ne sont pas indépendants, des matrices S de connexion des sous-blocs seront alors introduites. Avec ces nouveaux sous-blocs, le système matriciel à résoudre (8.25) devient :

$$\begin{bmatrix} R_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} & S_{\Omega_f} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ S_{\Omega_f}^T & R_{\Gamma_{f-fm}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} & S_{\Omega_m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{\Omega_m}^T & R_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{M}_{\Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{M}_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} \\ \mathbf{M}_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix}, \quad (8.26)$$

avec

- S_{Ω_f} la matrice de rigidité pour connecter les maillages des domaines $\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}$ et Γ_{f-fm} ,
- S_{Ω_m} la matrice de rigidité pour connecter les maillages des domaines $\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}$ et Γ_{m-fm} .

Avec la condition de continuité (8.20) imposée par les matrices de couplage C et D , les inconnues du côté fixe de Γ_{fm} , $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}}$, sont définies en fonction des inconnues du côté mobile de Γ_{fm} , $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}}$. Alors, le vecteur d'inconnues s'écrit tel que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C^{-1}D \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix}, \quad (8.27)$$

où I est la matrice identité avec la valeur 1 sur la diagonale et 0 ailleurs.

Le remplacement du vecteur d'inconnues par l'équation (8.27) dans le système matriciel (8.26), contenant la condition de continuité à l'interface Γ_{fm} (8.20), conduit au système matriciel :

$$\begin{bmatrix} R_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} & \mathbf{0} & S_{\Omega_f} C^{-1} D \\ \mathbf{0} & R_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} & S_{\Omega_m} \\ ((C^{-1}D)^T S_{\Omega_f}^T & S_{\Omega_m}^T & (C^{-1}D)^T R_{\Gamma_{f-fm}} C^{-1} D + R_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} \\ \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\Omega_f \setminus \Gamma_{f-fm}} \\ \mathbf{M}_{\Omega_m \setminus \Gamma_{m-fm}} \\ (C^{-1}D)^T \mathbf{M}_{\Gamma_{f-fm}} + \mathbf{M}_{\Gamma_{m-fm}} \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

La largeur de bande de la matrice de rigidité R_{Ω} est augmentée par les termes matriciels $(C^{-1}D)^T R_{\Gamma_{f-fm}} C^{-1}D$ et $S_{\Omega_f} C^{-1}D$ et sa transposée. Donc, la matrice à résoudre n'est plus creuse. En outre, si le maillage est conforme sur la frontière Γ_{fm} , alors le produit matriciel $C^{-1}D$ est égal à la matrice identité I .

Dans cette section, les matrices de couplage C et D pour connecter les maillages des domaines fixe et mobile ont été présentées dans un premier temps en éléments nodaux et d'arête en 2D et 3D. Dans un second temps, le système matriciel à résoudre avec les matrices de couplage a été décrit. Donc, la méthode des éléments avec joints a été détaillée. Dans la prochaine section, les différentes étapes de l'implémentation de la méthode seront étudiées.

8.2 Implémentation de la méthode des éléments avec joints

Deux points de l'implémentation de la méthode des éléments avec joints doivent être étudiés : le domaine d'intégration et le calcul numérique des intégrales des matrices de couplage C et D .

8.2.1 Domaine d'intégration des matrices de couplage

La matrice de couplage C avec des éléments nodaux (8.21a) et d'arête en 2D (8.22a) et en 3D (8.23a) ne dépend que des fonctions de forme du côté fixe de l'interface Γ_{f-fm} . Donc le domaine d'intégration des termes de la matrice C sera le maillage de l'interface du côté fixe, Γ_{f-fm_h} (en rouge sur la figure 8.1).

Lorsque le rotor est en mouvement, les maillages Γ_{m-fm_h} et Γ_{f-fm_h} (respectivement en noir et en rouge sur la figure 8.1) sont non-conformes sur l'interface Γ_{fm} . Le maillage de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} pénètre dans celui du côté mobile Γ_{m-fm_h} et vice-versa. Pour ne pas préférer le maillage Γ_{f-fm_h} à Γ_{m-fm_h} ou inversement, un troisième maillage Γ_{fm_h} est défini (en bleu sur la figure 8.1) pour calculer la matrice de couplage D avec des éléments nodaux (8.21b) et d'arête en 2D (8.22b) et en 3D (8.23b).

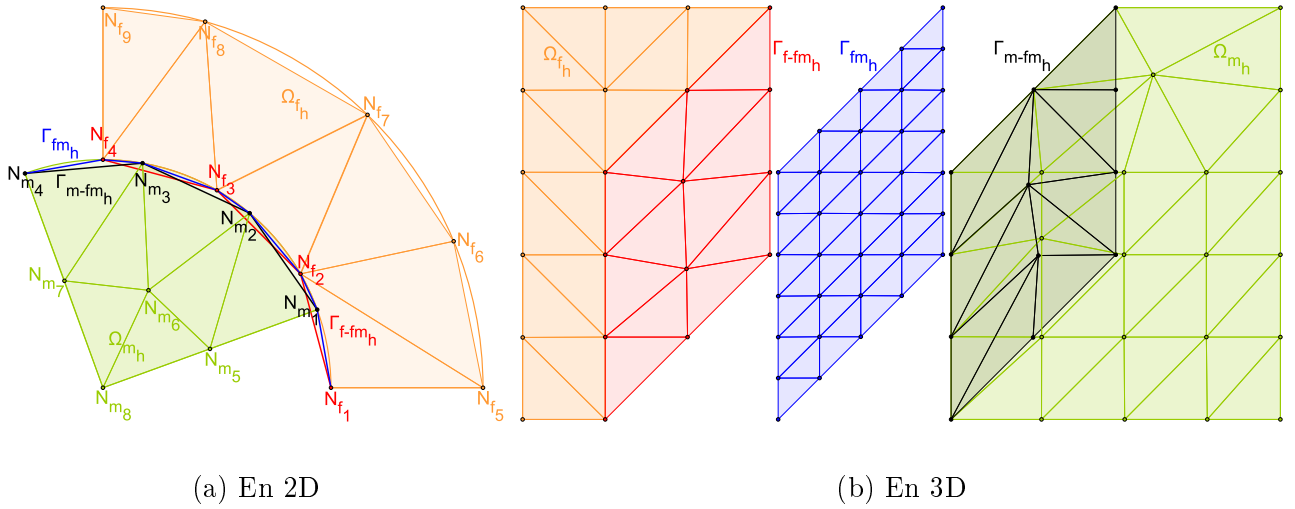


FIGURE 8.1 – Domaine d'intégration Γ_{f-fm_h} de C et Γ_{fm_h} de D

8.2.1.1 En 2D

En 2D, ce maillage Γ_{fm_h} est l'intersection entre les maillages de l'interface des côtés mobile Γ_{m-fm_h} et fixe Γ_{f-fm_h} [Buffa *et al.*, 2001b]–[Rapetti *et al.*, 2000a]–[Rapetti *et al.*, 2000b]–[Rapetti, 2001] tel que :

- Les nœuds de Γ_{fm_h} sont les nœuds de Γ_{f-fm_h} et de Γ_{m-fm_h} ;
- Les arêtes de Γ_{fm_h} sont les segments entre les nœuds de Γ_{f-fm_h} et de Γ_{m-fm_h} .

Par exemple sur la figure 8.1a, les nœuds de Γ_{fm_h} sont les nœuds rouges n_{f1} , n_{f2} , n_{f3} et n_{f4} de Γ_{f-fm_h} et les nœuds noirs n_{m1} , n_{m2} , n_{m3} et n_{m4} de Γ_{m-fm_h} . Les arêtes de Γ_{fm_h} sont représentées en bleu entre les nœuds de Γ_{fm_h} .

Finalement en 2D, le domaine de définition des intégrales des matrices de couplage C et D (8.21)-(8.22) est Γ_{f-fm_h} pour C , le maillage de l'interface du côté fixe, et Γ_{fm_h} pour D , le maillage issu de l'intersection des maillages Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} .

Dans le prochain paragraphe, le domaine d'intégration Γ_{fm_h} est défini en 3D.

8.2.1.2 En 3D

En 3D, les maillages sur l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} et du côté mobile Γ_{m-fm_h} ne sont plus des lignes comme en 2D, mais des facettes triangulaires ou quadrangulaires. L'intersection entre deux quadrangles est souvent un quadrangle. Mais l'intersection entre deux triangles est plus compliquée : c'est un polyèdre avec au maximum six nœuds et six arêtes. Pour surmonter ce problème d'intersection et définir le domaine d'intégration de la matrice de couplage D , le troisième maillage Γ_{fm_h} est défini comme un maillage de l'interface Γ_{fm} indépendant des maillages des côtés mobile Γ_{m-fm_h} et fixe Γ_{f-fm_h} [Bouillault *et al.*, 2003]–[Rapetti *et al.*, 2002]. Le choix du pas de discrétisation du troisième maillage est arbitraire, mais plus petit que ceux de Γ_{m-fm_h} et Γ_{f-fm_h} . Par exemple sur la figure 8.1b, le pas de discrétisation de Γ_{fm_h} est quatre fois plus petit que ceux de Γ_{m-fm_h} et Γ_{f-fm_h} .

Le maillage d'intégration Γ_{fm_h} n'est pas un des deux maillages existants, Γ_{f-fm_h} ou Γ_{m-fm_h} , pour ne pas favoriser un maillage par rapport à un autre. De plus, ce troisième maillage Γ_{fm_h} peut être raffiné indépendamment de Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} , afin d'obtenir une meilleure précision dans le calcul des intégrales de la matrice D .

8.2.1.3 Récapitulatif

En 2D et en 3D, les domaines de définition des intégrales des matrices de couplage C et D (8.21)–(8.22)–(8.23) sont Γ_{f-fm_h} pour C et Γ_{fm_h} pour D . En 2D et en 3D, Γ_{f-fm_h} est le maillage de l'interface du côté fixe. En 2D, Γ_{fm_h} est l'intersection des maillages Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} . Alors qu'en 3D, Γ_{f-fm_h} est un maillage indépendant de Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} et plus fin.

Dans la prochaine sous-section, une méthode numérique sera définie pour calculer les intégrales des matrices C et D sur ces maillages.

8.2.2 Intégration des termes des matrices de couplage

Pour calculer numériquement les intégrales avec des fonctions de forme des matrices de couplage C et D (8.21)–(8.22)–(8.23), deux méthodes sont proposées dans la littérature :

- La première méthode calcule les intégrales à partir des distances ou des angles entre les nœuds du maillage [Antunes *et al.*, 2005]–[Buffa *et al.*, 2001b]–[Rapetti *et al.*, 2000a]–[Rapetti, 2001] ;
- La seconde méthode repose sur l'utilisation d'une formule de quadrature, celle de Gauss [Bouillault *et al.*, 2003]–[Buffa *et al.*, 2001b]–[Rapetti *et al.*, 2000b]–[Rapetti *et al.*, 2002].

L'inconvénient de la première méthode est que les fonctions de forme doivent être au 1^{er} ordre. Les fonctions de forme nodales utilisées sont en général au 2^{ème} ordre et celles d'arête au 1^{er} ordre. Donc par soucis de généralité, la méthode de la quadrature de Gauss sera étudiée dans cette sous-section et utilisée pour calculer les termes des matrices de couplage C et D .

8.2.2.1 En 2D

Soit $n_{A_{\Gamma_{fm}}}$ le nombre d'arêtes du maillage de l'interface Γ_{fm_h} . Soient $a_{fq}, 1 \leq q \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}$, $a_{mr}, 1 \leq r \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}$, et $a_{fs}, 1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{fm}}}$ les arêtes respectivement du maillage de

8.2. IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS

l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} , du maillage de l'interface du côté mobile Γ_{m-fm_h} et du maillage de la surface de glissement Γ_{fm_h} .

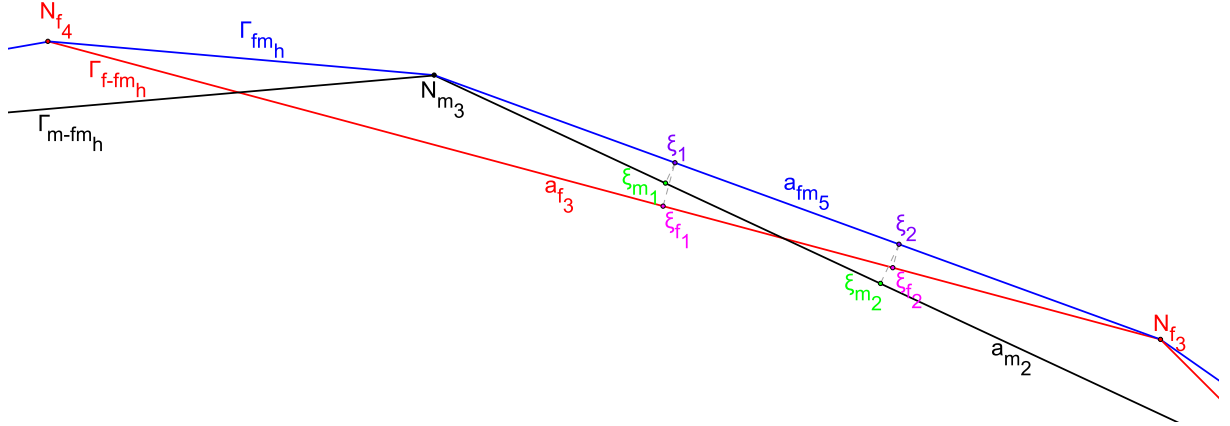


FIGURE 8.2 – Projection des points de Gauss de Γ_{fm_h} sur Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} en 2D

Soit n_{pga} le nombre de points de Gauss pour intégrer exactement sur une arête. Soient $\xi_g^{a_i}$ et $\omega_g^{a_i}$, $1 \leq g \leq n_{pga}$, $1 \leq i \leq n_A$ respectivement le point de Gauss g et son poids pour l'arête a_i du maillage Ω_h .

Soient $\xi_g^{a_{fm_s}}$ et $\xi_{m_g}^{a_{fm_s}}$, $1 \leq g \leq n_{pga}$, $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{fm}}}$, les projections orthogonales de $\xi_g^{a_{fm_s}}$ sur les maillages de l'interface des côtés fixe Γ_{f-fm_h} et mobile Γ_{m-fm_h} . Le calcul de $\xi_g^{a_{fm_s}}$ et $\xi_{m_g}^{a_{fm_s}}$, $1 \leq g \leq n_{pga}$, $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{fm}}}$, est fait par [Buffa *et al.*, 2001b]–[Rapetti *et al.*, 2000b] :

- la construction d'un opérateur de projection orthogonale des arêtes a_{fm_s} , $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{fm}}}$, du maillage Γ_{fm_h} vers les arêtes des maillages Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} ;
- la projection de chaque point de Gauss $\xi_g^{a_{fm_s}}$, $1 \leq g \leq n_{pga}$, $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{fm}}}$, sur le maillage Γ_{f-fm_h} en créant le point de Gauss projeté $\xi_{f_g}^{a_{fm_s}}$;
- la projection de chaque point de Gauss $\xi_g^{a_{fm_s}}$, $1 \leq g \leq n_{pga}$, $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{fm}}}$, sur le maillage Γ_{m-fm_h} en créant le point de Gauss projeté $\xi_{m_g}^{a_{fm_s}}$.

Par exemple sur la figure 8.2, les points de Gauss $\xi_1^{a_{fm_5}}$ et $\xi_2^{a_{fm_5}}$ de l'arête $a_{fm_5} \in \Gamma_{fm_h}$ sont projetés orthogonalement sur l'arête $a_{f_3} \in \Gamma_{f-fm_h}$ en créant les points de Gauss projetés $\xi_{f_1}^{a_{fm_5}}$ et $\xi_{f_2}^{a_{fm_5}}$. De la même façon, les points de Gauss $\xi_1^{a_{fm_5}}$ et $\xi_2^{a_{fm_5}}$ sont projetés orthogonalement sur l'arête $a_{m_2} \in \Gamma_{m-fm_h}$ en créant les points de Gauss projetés $\xi_{m_1}^{a_{fm_5}}$ et $\xi_{m_2}^{a_{fm_5}}$.

8.2.2.1.1 En éléments nodaux

Avec l'intégration de Gauss, les termes des matrices de couplage C_n et D_n en éléments nodaux (8.21) sont calculés en 2D tels que [Buffa *et al.*, 2001b]–[Rapetti *et al.*, 2000b] :

$$\begin{aligned} c_n(p, j) &= \int_{\Gamma_{f-fm_h}} w_{n_{fp}} w_{n_{fj}} d\Gamma, \\ &= \sum_{q=1}^{n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}} \sum_{g=1}^{n_{pga}} w_{n_{fp}} \left(\xi_g^{a_{fq}} \right) w_{n_{fj}} \left(\xi_g^{a_{fq}} \right) \omega_g^{a_{fq}}, 1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}, \end{aligned} \quad (8.29a)$$

$$\begin{aligned} d_n(p, l) &= \int_{\Gamma_{fm_h}} w_{n_{fp}} w_{n_{ml}} d\Gamma, \\ &= \sum_{s=1}^{n_{A_{\Gamma_{fm}}}} \sum_{g=1}^{n_{pga}} w_{n_{fp}} \left(\xi_g^{a_{fm_s}} \right) w_{n_{ml}} \left(\xi_g^{a_{fm_s}} \right) \omega_g^{a_{fm_s}}, 1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}, 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}} \end{aligned} \quad (8.29b)$$

avec

- $\xi_g^{a_{fq}}$ et $\omega_g^{a_{fq}}$, $1 \leq g \leq n_{pg_a}$, $1 \leq q \leq n_{A_{\Gamma_{f-f_m}}}$, respectivement les points et les poids de Gauss de l'arête a_{fq} ,
- $\xi_g^{a_{fms}}$ et $\omega_g^{a_{fms}}$, $1 \leq g \leq n_{pg_a}$, $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{f_m}}}$, respectivement les points et les poids de Gauss de l'arête a_{fms} ,
- $\xi_{f_g}^{a_{fms}}$ et $\xi_{m_g}^{a_{fms}}$, $1 \leq g \leq n_{pg_a}$, $1 \leq s \leq n_{A_{\Gamma_{f_m}}}$, respectivement les projections orthogonales de $\xi_g^{a_{fms}}$ sur les maillages de l'interface du côté fixe $\Gamma_{f-f_m_h}$ et du côté mobile $\Gamma_{m-f_m_h}$.

En 2D, l'intégration de Gauss des termes des matrices de couplage C et D a été étudiée en éléments nodaux dans ce paragraphe. En éléments d'arête, les matrices de couplage C et D sont différentes d'en éléments nodaux. Leurs intégrations avec la quadrature de Gauss sera étudiée dans le prochain paragraphe.

8.2.2.1.2 En éléments d'arête

Avec la formule de quadrature de Gauss, les termes des matrices de couplage C_{a_2} et D_{a_2} en éléments d'arête (8.22) sont calculés en 2D tels que :

$$\begin{aligned} c_{a_2}(p, j) &= \int_{\Gamma_{f-f_m_h}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{fp}}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{fj}}) d\Gamma, 1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-f_m}}}, \\ &= \sum_{q=1}^{n_{A_{\Gamma_{f-f_m}}}} \sum_{g=1}^{n_{pg_a}} \left(\mathbf{t}_{a_{fq}} \cdot \mathbf{w}_{a_{fp}} \left(\xi_g^{a_{fq}} \right) \right) \left(\mathbf{t}_{a_{fq}} \cdot \mathbf{w}_{a_{fj}} \left(\xi_g^{a_{fq}} \right) \right) \omega_g^{a_{fq}}, \end{aligned} \quad (8.30a)$$

$$\begin{aligned} d_{a_2}(p, l) &= \int_{\Gamma_{f_m_h}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{fp}}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{a_{ml}}) d\Gamma, 1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-f_m}}}, 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-f_m}}}, \\ &= \sum_{s=1}^{n_{A_{\Gamma_{f_m}}}} \sum_{g=1}^{n_{pg_a}} \left(\mathbf{t}_{a_{fms}} \cdot \mathbf{w}_{a_{fp}} \left(\xi_{f_g}^{a_{fms}} \right) \right) \left(\mathbf{t}_{a_{fms}} \cdot \mathbf{w}_{a_{ml}} \left(\xi_{m_g}^{a_{fms}} \right) \right) \omega_g^{a_{fms}} \end{aligned} \quad (8.30b)$$

avec

- $\mathbf{t}_{a_{fq}}$ le vecteur unitaire tangent à l'arête a_{fq} du maillage de l'interface du côté fixe $\Gamma_{f-f_m_h}$;
- $\mathbf{t}_{a_{fms}}$ le vecteur unitaire tangent à l'arête a_{fms} du maillage de l'interface $\Gamma_{f_m_h}$.

Les points et les poids de Gauss sont définis comme dans le paragraphe précédent.

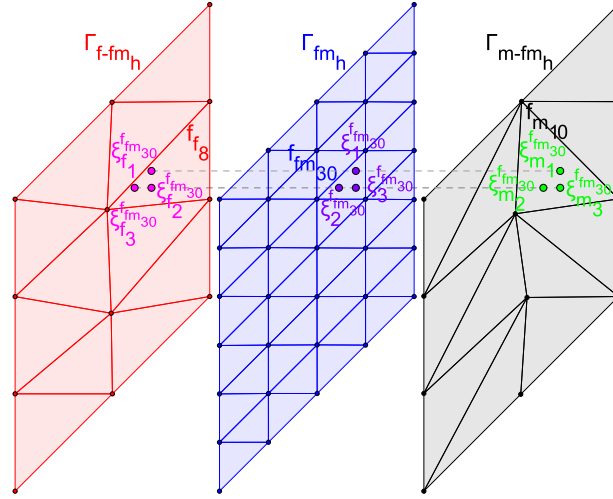
Dans ce paragraphe, l'intégration de Gauss des termes des matrices de couplage C et D a été étudiée en 2D en éléments nodaux et d'arête. Les points de Gauss sont sur les arêtes du maillage. Dans le prochain paragraphe, l'intégration de Gauss des matrices C et D sera étudiée en 3D en éléments nodaux et d'arête. Les points de Gauss seront sur les facettes du maillage.

8.2.2.2 En 3D

Soient $n_{F_{\Gamma_{f-f_m}}}$, $n_{F_{\Gamma_{m-f_m}}}$ et $n_{F_{\Gamma_{f_m}}}$ le nombre de facettes respectivement du maillage de l'interface du côté fixe $\Gamma_{f-f_m_h}$, du maillage de l'interface du côté mobile $\Gamma_{m-f_m_h}$ et du maillage de la surface de glissement $\Gamma_{f_m_h}$.

Soient f_{fq} , $1 \leq q \leq n_{F_{\Gamma_{f-f_m}}}$, f_{mr} , $1 \leq r \leq n_{F_{\Gamma_{m-f_m}}}$ et f_{fms} , $1 \leq s \leq n_{F_{\Gamma_{f_m}}}$, les facettes respectivement du maillage de l'interface du côté fixe $\Gamma_{f-f_m_h}$, du maillage de l'interface du côté mobile $\Gamma_{m-f_m_h}$ et du maillage de l'interface $\Gamma_{f_m_h}$.

Soit n_{pg_f} le nombre de points de Gauss pour intégrer exactement sur une facette. Soient $\xi_g^{f_i}$ et $\omega_g^{f_i}$, $1 \leq g \leq n_{pg_f}$, $1 \leq i \leq n_F$ respectivement le point de Gauss g et son poids pour la facette f_i du maillage Ω_h .


 FIGURE 8.3 – Projection des points de Gauss de Γ_{fm_h} sur Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} en 3D

Soient $\xi_{f_g}^{ffm_s}$ et $\xi_{m_g}^{ffm_s}$, $1 \leq g \leq n_{pg_f}$, $1 \leq s \leq n_{F_{\Gamma_{fm}}}$, les projections orthogonales de $\xi_g^{ffm_s}$ sur les maillages de l'interface des côtés fixe Γ_{f-fm_h} et mobile Γ_{m-fm_h} . Le calcul de $\xi_{f_g}^{ffm_s}$ et $\xi_{m_g}^{ffm_s}$, $1 \leq g \leq n_{pg_f}$, $1 \leq s \leq n_{F_{\Gamma_{fm}}}$, est fait comme en 2D par [Bouillault *et al.*, 2003]–[Rapetti *et al.*, 2002] :

- la construction d'un opérateur de projection orthogonale des facettes f_{fm_s} , $1 \leq s \leq n_{F_{\Gamma_{fm}}}$, du maillage Γ_{fm_h} vers les facettes des maillages Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} ;
- la projection de chaque point de Gauss $\xi_g^{ffm_s}$, $1 \leq g \leq n_{pg_f}$, $1 \leq s \leq n_{F_{\Gamma_{fm}}}$, sur le maillage Γ_{f-fm_h} en créant le point de Gauss projeté $\xi_{f_g}^{ffm_s}$;
- la projection de chaque point de Gauss $\xi_g^{ffm_s}$, $1 \leq g \leq n_{pg_f}$, $1 \leq s \leq n_{F_{\Gamma_{fm}}}$, sur le maillage Γ_{m-fm_h} en créant le point de Gauss projeté $\xi_{m_g}^{ffm_s}$.

Sur la figure 8.3, les points de Gauss ξ_1^{fm30} , ξ_2^{fm30} et ξ_3^{fm30} de la facette $f_{fm30} \in \Gamma_{fm_h}$ sont projetés orthogonalement sur la facette $f_{f8} \in \Gamma_{f-fm_h}$ en créant les points de Gauss projetés ξ_{f1}^{ffm30} , ξ_{f2}^{ffm30} et ξ_{f3}^{ffm30} . De la même façon, les points de Gauss ξ_1^{fm30} , ξ_2^{fm30} et ξ_3^{fm30} sont projetés orthogonalement sur la facette $f_{m10} \in \Gamma_{m-fm_h}$ en créant les points de Gauss projetés ξ_{m1}^{ffm30} , ξ_{m2}^{ffm30} et ξ_{m3}^{ffm30} .

8.2.2.2.1 En éléments nodaux

Avec la formule de quadrature de Gauss, les termes des matrices de couplage C_n et D_n en éléments nodaux (8.21) sont calculés en 3D tels que :

$$\begin{aligned} c_n(p, j) &= \int_{\Gamma_{f-fm_h}} w_{n_{f_p}} w_{n_{f_j}} d\Gamma, \\ &= \sum_{q=1}^{n_{F_{\Gamma_{f-fm}}}} \sum_{g=1}^{n_{pg_f}} w_{n_{f_p}} \left(\xi_g^{ffq} \right) w_{n_{f_j}} \left(\xi_g^{ffq} \right) \omega_g^{ffq}, 1 \leq p, j \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}, \end{aligned} \quad (8.31a)$$

$$\begin{aligned} d_n(p, l) &= \int_{\Gamma_{fm_h}} w_{n_{f_p}} w_{n_{m_l}} d\Gamma, \\ &= \sum_{s=1}^{n_{F_{\Gamma_{fm}}}} \sum_{g=1}^{n_{pg_f}} w_{n_{f_p}} \left(\xi_g^{ffms} \right) w_{n_{m_l}} \left(\xi_g^{ffms} \right) \omega_g^{ffms}, 1 \leq p \leq n_{N_{\Gamma_{f-fm}}}, 1 \leq l \leq n_{N_{\Gamma_{m-fm}}} \end{aligned} \quad (8.31b)$$

avec

- ξ_g^{ffq} et ω_g^{ffq} , $1 \leq g \leq n_{pgf}$, $1 \leq q \leq n_{\Gamma_{f-fm}}$, respectivement les points et les poids de Gauss de la facette f_{fq} ,
- ξ_g^{ffms} et ω_g^{ffms} , $1 \leq g \leq n_{pgf}$, $1 \leq s \leq n_{\Gamma_{fm}}$, respectivement les points et les poids de Gauss de la facette f_{fms} ,
- ξ_g^{ffms} et $\xi_{m_g}^{ffms}$, $1 \leq g \leq n_{pgf}$, $1 \leq s \leq n_{\Gamma_{fm}}$, respectivement les projections orthogonales de ξ_g^{ffms} sur les maillages des interfaces du côté fixe Γ_{f-fm_h} et du côté mobile Γ_{m-fm_h} .

En 3D, l'intégration de Gauss des termes des matrices de couplage C et D a été étudiée en éléments nodaux dans ce paragraphe. En éléments d'arête, les matrices de couplage C et D sont différentes d'en éléments nodaux. Leur intégration avec la quadrature de Gauss sera étudiée dans le prochain paragraphe.

8.2.2.2.2 En éléments d'arête

Avec l'intégration, les termes des matrices de couplage C_{a3} et D_{a3} en éléments d'arête en 3D (8.23) sont calculés tels que [Bouillault *et al.*, 2003]–[Rapetti *et al.*, 2002] :

$$\begin{aligned} c_{a3}(p, j) &= \int_{\Gamma_{f-fm_h}} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{fp}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{fj}}) d\Gamma, 1 \leq p, j \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}, \\ &= \sum_{q=1}^{n_{\Gamma_{f-fm}}} \sum_{g=1}^{n_{pgf}} \left(\mathbf{n}_{ffq} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{fp}} \left(\xi_g^{ffq} \right) \right) \cdot \left(\mathbf{n}_{ffq} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{fj}} \left(\xi_g^{ffq} \right) \right) \omega_g^{ffq}, \end{aligned} \quad (8.32a)$$

$$\begin{aligned} d_{a3}(p, l) &= \int_{\Gamma_{fm_h}} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{fp}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ml}}) d\Gamma, 1 \leq p \leq n_{A_{\Gamma_{f-fm}}}, 1 \leq l \leq n_{A_{\Gamma_{m-fm}}}, \\ &= \sum_{s=1}^{n_{\Gamma_{fm}}} \sum_{g=1}^{n_{pgf}} \left(\mathbf{n}_{ffms} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{fp}} \left(\xi_g^{ffms} \right) \right) \cdot \left(\mathbf{n}_{ffms} \times \mathbf{w}_{\mathbf{a}_{ml}} \left(\xi_{m_g}^{ffms} \right) \right) \omega_g^{ffms}, \end{aligned} \quad (8.32b)$$

avec

- \mathbf{n}_{ffq} le vecteur unitaire normal à la facette f_{fq} du maillage du côté fixe de l'interface Γ_{f-fm_h} ;
- \mathbf{n}_{ffms} le vecteur unitaire normal à la facette f_{fms} du maillage de la surface de glissement Γ_{fm_h} .

8.2.2.3 Récapitulatif

Finalement, la méthode utilisée pour calculer numériquement les intégrales des matrices de couplage C et D (8.21)-(8.22)-(8.23) est la formule de quadrature de Gauss en 2D ou en 3D et en éléments nodaux ou d'arête, parce qu'elle permet de calculer les intégrales avec des fonctions de forme d'un ordre quelconque.

Dans cette sous-section, le calcul des matrices de couplage C et D (8.21)-(8.22)-(8.23) a été détaillé en 2D en éléments nodaux (8.29) et en éléments d'arête (8.30) et en 3D en éléments nodaux (8.31) et en éléments d'arête (8.32). Dans la prochaine sous-section, l'inversion de la matrice de couplage C sera étudiée.

8.2.3 Inversion de la matrice de couplage C

Pour exprimer le vecteur des inconnues $\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}}$ sur le maillage de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} en fonction du vecteur des inconnues $\mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}}$ sur le maillage de l'interface du côté

8.2. IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS

mobile Γ_{m-fm_h} , il faut inverser la matrice de couplage C , et la condition de continuité (8.20) est alors telle que :

$$\mathbf{X}_{\Gamma_{f-fm}} = C^{-1} D \mathbf{X}_{\Gamma_{m-fm}}. \quad (8.33)$$

Dans cette sous-section, l'inversion de la matrice C sera étudiée en éléments nodaux et d'arête.

8.2.3.1 En éléments nodaux

D'après la définition des fonctions de forme nodales du paragraphe 2.2.4.1, la matrice de couplage C est une matrice bande de largeur $n (n_{nd_{max}} + n_{el_{max}}) - n_{el_{max}} + 1$, où :

- n est l'ordre des fonctions de forme,
- $n_{nd_{max}}$ est le nombre maximal des nœuds appartenant aux éléments qui ont en commun un nœud, en ne comptant pas le nœud considéré,
- $n_{el_{max}}$ est le nombre maximal d'éléments surfaciques par nœud.

Voici ci-dessous des exemples de largeur de bande de la matrice C avec la description des grandeurs n , $n_{nd_{max}}$ et $n_{el_{max}}$. Par défaut dans le logiciel Flux[®], les fonctions de forme nodales utilisées sont au 2^{ème} ordre. Donc dans la suite, n est considéré comme valant 2. La matrice de couplage C est composée des nœuds du maillage de la surface de glissement du côté fixe Γ_{f-fm_h} . En deux dimensions, ce maillage Γ_{f-fm_h} est composé seulement de lignes, comme sur la figure 8.2. Alors en deux dimensions, $n_{nd_{max}}$, le nombre maximal de nœuds appartenant aux mêmes lignes qu'un nœud, est de 2 et, $n_{el_{max}}$, le nombre maximal d'éléments surfaciques par nœud, est nul vu que nos éléments sont linéiques. Donc en dimension 2 avec des fonctions de forme nodales du 2^{ème} ordre, la matrice de couplage C sera une matrice bande de largeur 5, une matrice pentadiagonale.

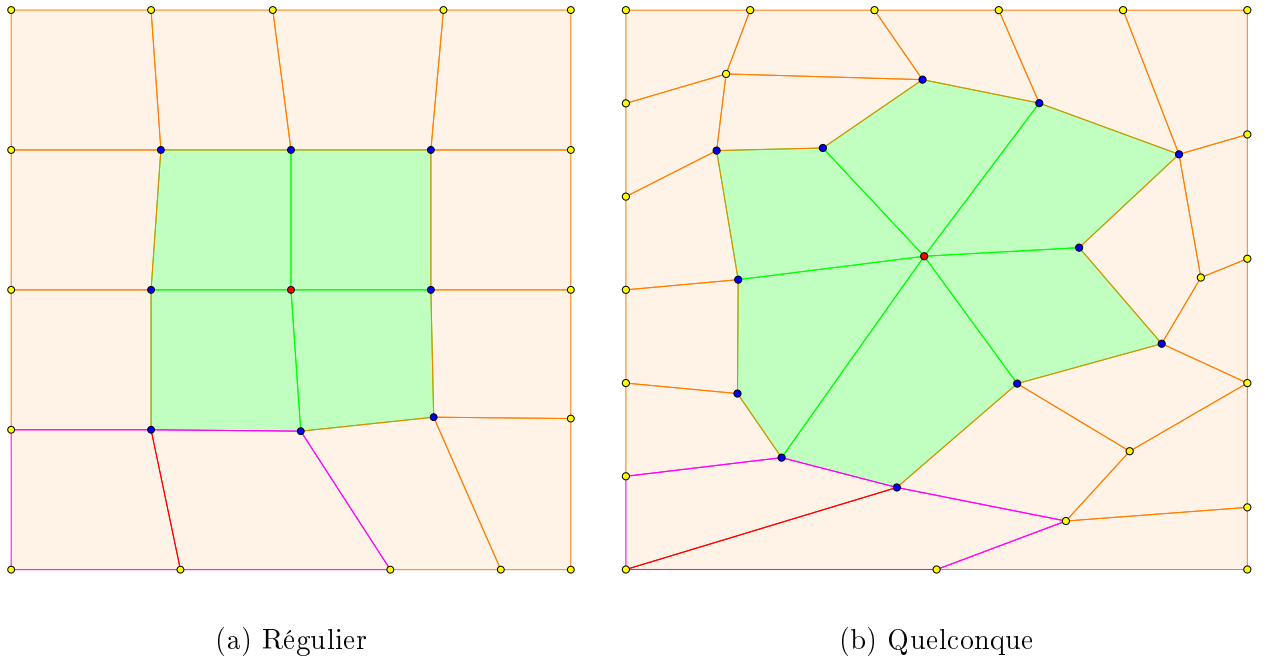


FIGURE 8.4 – Maillage en 3D de la surface de glissement du côté fixe Γ_{f-fm_h} constitué seulement d'hexaèdres

En trois dimensions, le maillage Γ_{f-fm_h} est composé de tétraèdres et d'hexaèdres. Considérons qu'il est composé seulement d'hexaèdres, comme sur la figure 8.4. Le maillage de la figure 8.4a est régulier, alors que celui de la figure 8.4b est quelconque. Sur la figure 8.4a, les

nœuds en bleu appartiennent à des hexaèdres du nœud en rouge, le nombre de nœuds bleus est de 8, alors $n_{nd_{max}} = 8$. De plus sur cette figure 8.4a, le nœud rouge est compris dans tous les hexaèdres en vert, qui sont au nombre de 4, donc $n_{el_{max}} = 4$. Donc pour un maillage régulier d'hexaèdres, le nombre maximal des nœuds appartenant aux hexaèdres qui ont en commun un nœud est de 8 et le nombre maximal d'éléments hexaédriques par nœud, est de 4. Donc lorsque le maillage est régulier en dimension 3 avec des hexaèdres et des fonctions de forme nodales du 2^{ème} ordre, la matrice de couplage C sera une matrice bande de largeur 21. En considérant le maillage quelconque de la figure 8.4b, les nœuds bleus partageant les hexaèdres du nœud rouge sont au nombre de 12. Mais pour un maillage quelconque, $n_{nd_{max}}$, le nombre maximal de nœuds appartenant aux hexaèdres, qui ont en commun un nœud, est non borné et varie suivant le maillage. De la même façon, $n_{el_{max}}$, le nombre maximal d'éléments hexaédriques par nœud est non borné et varie suivant le maillage. Donc lorsque le maillage est quelconque en dimension 3 avec des hexaèdres et des fonctions de forme nodales du 2^{ème} ordre, il est difficile de trouver a priori la largeur de bande de la matrice de couplage C , qui dépendra du maillage $\Gamma_{f-f_{m_h}}$.

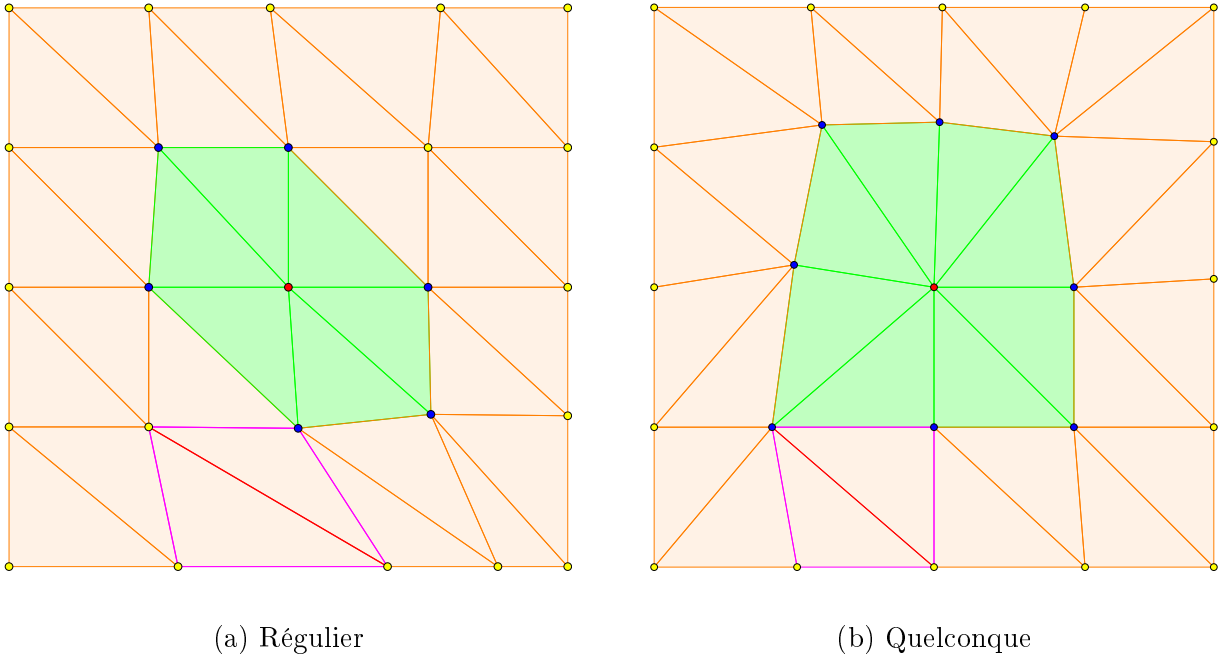


FIGURE 8.5 – Maillage en 3D de la surface de glissement du côté fixe $\Gamma_{f-f_{m_h}}$ constitué seulement de tétraèdres

Considérons que le maillage $\Gamma_{f-f_{m_h}}$ en trois dimensions est composé seulement de tétraèdres, comme sur la figure 8.5. Le maillage de la figure 8.5a est régulier, alors que celui de la figure 8.5b est quelconque. Sur la figure 8.5a, les nœuds en bleu appartiennent à des tétraèdres qui ont en commun le nœud en rouge, le nombre de nœuds bleus est de 6, alors $n_{nd_{max}} = 6$. De plus sur cette figure 8.5a, le nœud rouge est compris dans tous les tétraèdres en vert, qui sont au nombre de 6, donc $n_{el_{max}} = 6$. Donc pour un maillage régulier de tétraèdres, le nombre maximal des nœuds appartenant aux tétraèdres qui ont en commun un nœud est de 6 et le nombre maximal d'éléments tétraédriques par nœud est de 6. Donc lorsque le maillage est régulier en dimension 3 avec des tétraèdres et des fonctions de forme nodales du 2^{ème} ordre, la matrice de couplage C sera une matrice bande de largeur 19. En considérant le maillage quelconque de la figure 8.5b, les nœuds bleus partageant les tétraèdres du nœud rouge sont au nombre de 8. Mais pour un maillage quelconque, $n_{nd_{max}}$, le nombre maximal des nœuds

8.2. IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS

appartenant aux tétraèdres, qui ont en commun un nœud, est non borné et varie suivant le maillage. De la même façon, $n_{nel_{max}}$, le nombre maximal d'éléments tétraédriques par nœud est non borné et varie suivant le maillage. Donc lorsque le maillage est quelconque en dimension 3 avec des tétraèdres et des fonctions de forme nodales du 2^{ème} ordre, il est difficile de trouver a priori la largeur de bande de la matrice de couplage C , qui dépendra du maillage Γ_{f-fm_h} .

Finalement avec des fonctions de forme nodales, en 2D, la matrice de couplage C est une matrice bande de largeur 5. En 3D, il est plus difficile d'estimer la largeur de bande de la matrice C , car elle dépend du maillage. Les algorithmes d'inversion de matrice sont plus rapides pour des matrices bandes que pour des matrices quelconques.

Dans le chapitre 9, l'inversion de la matrice de couplage C sera effectuée avec l'algorithme du solveur MUMPS [Amestoy *et al.*, 2015].

Dans ce paragraphe, l'inversion de la matrice C a été étudiée en éléments nodaux. Dans le prochain paragraphe, elle sera étudiée en éléments d'arête.

8.2.3.2 En éléments d'arête

D'après la définition des fonctions de forme d'arête du paragraphe 2.2.4.2, la matrice de couplage C est une matrice bande de largeur $2n(n_{aar_{max}} + 1)$, où

- n est l'ordre des fonctions de forme,
- $n_{aar_{max}}$ est le nombre maximal d'arêtes appartenant aux éléments qui ont en commun une arête, en ne comptant pas l'arête considérée.

Voici ci-dessous des exemples de largeur de bande de la matrice C avec la description des grandeurs n et $n_{aar_{max}}$. Par défaut dans le logiciel Flux[®], les fonctions de forme d'arête utilisées sont au 1^{er} ordre. Donc dans la suite, n est considéré comme valant 1. La matrice de couplage C est composée des arêtes du maillage de la surface de glissement du côté fixe Γ_{f-fm_h} . En deux dimensions, ce maillage Γ_{f-fm_h} est composé seulement de lignes, comme sur la figure 8.2. Alors en deux dimensions, $n_{aar_{max}}$, le nombre maximal d'arêtes appartenant aux mêmes lignes qu'une arête, est nul vu que notre espace est en dimension deux. Donc en dimension 2 avec des fonctions de forme d'arêtes du 1^{er} ordre, la matrice de couplage C sera une matrice bande de largeur 2.

En trois dimensions, le maillage Γ_{f-fm_h} est composé de tétraèdres et d'hexaèdres. Considérons qu'il est composé seulement d'hexaèdres, comme sur la figure 8.4. Le maillage de la figure 8.4a est régulier, alors que celui de la figure 8.4b est quelconque. Sur les deux figures 8.4, les arêtes en rose appartiennent aux hexaèdres de l'arête en rouge, le nombre d'arêtes roses est de 6, alors $n_{aar_{max}} = 6$. Donc pour un maillage régulier ou quelconque d'hexaèdres, le nombre maximal d'arêtes appartenant aux hexaèdres qui ont en commun une arête est de 6. Donc en dimension trois avec des hexaèdres et des fonctions de forme d'arêtes du 1^{er} ordre, la matrice de couplage C sera une matrice bande de largeur 14.

Considérons que le maillage Γ_{f-fm_h} en trois dimensions est composé seulement de tétraèdres, comme sur la figure 8.5. Le maillage de la figure 8.5a est régulier, alors que celui de la figure 8.5b est quelconque. Sur les deux figures 8.5a, les arêtes en rose appartiennent aux tétraèdres de l'arête en rouge, le nombre d'arêtes roses est de 4, alors $n_{aar_{max}} = 4$. Donc pour un maillage régulier ou quelconque de tétraèdres, le nombre maximal d'arêtes appartenant aux tétraèdres qui ont en commun une arête est de 4. Donc en dimension trois avec des tétraèdres et des fonctions de forme d'arêtes du 1^{er} ordre, la matrice de couplage C sera une matrice bande de largeur 10.

Finalement avec des fonctions de forme d'arêtes, en 2D, la matrice de couplage C est une matrice bande de largeur 2. En 3D, la matrice de couplage C est une matrice bande de largeur 14 avec des tétraèdres et des hexaèdres, ce qui correspond à la largeur de bande maximal entre celle

obtenue avec que des hexaèdres et celle avec que des tétraèdres. Les algorithmes d'inversion de matrice sont plus rapides pour des matrices bandes que pour des matrices quelconques.

8.2.4 Conclusion

Finalement la méthode des éléments avec joints a été étudiée dans ce chapitre. Cette méthode impose la continuité des variables sur la surface de glissement Γ_{fm} à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Ceci revient à exprimer les inconnues du côté fixe de Γ_{fm} , \mathbf{X}_{Γ_f-fm} , en fonction des inconnues du côté mobile de Γ_{fm} , \mathbf{X}_{Γ_m-fm} , à l'aide des matrices de couplage C et D .

Donc pour exprimer \mathbf{X}_{Γ_f-fm} en fonction de \mathbf{X}_{Γ_m-fm} , il faut dans un premier temps définir le domaine d'intégration des matrices de couplage C et D (8.21)-(8.22)-(8.23) : le maillage de l'interface du côté fixe Γ_{f-fm_h} pour la matrice C et un troisième maillage Γ_{fm_h} pour la matrice D . Ce troisième maillage Γ_{fm_h} est défini en 2D comme l'intersection des deux maillages d'interface des côtés fixe Γ_{f-fm_h} et mobile Γ_{m-fm_h} et en 3D comme un maillage indépendant de Γ_{f-fm_h} et Γ_{m-fm_h} mais plus fin. Dans un deuxième temps, il faut calculer les intégrales des termes de C et D avec la formule de quadrature de Gauss en 2D en éléments nodaux (8.29) et en éléments d'arête (8.30) et en 3D en éléments nodaux (8.31) et en éléments d'arête (8.32). Dans un troisième et dernier temps, il faut inverser la matrice de couplage C , une matrice bande, à l'aide des algorithmes existants de MUMPS.

Dans le prochain chapitre, l'implémentation de la méthode des éléments avec joints, décrite dans ce chapitre, sera validée en 2D en éléments nodaux et en éléments d'arête. La validation en 3D n'a pas été réalisée.

Chapitre 9

Application de la méthode des éléments avec joints à des formulations 2D

Sommaire

9.1	Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D magnétostatique en éléments nodaux	199
9.1.1	Description du problème	199
9.1.1.1	Géométrie	200
9.1.1.2	Maillage	201
9.1.1.3	Formulation en \mathbf{A} nodal en 2D	201
9.1.1.3.1	Formulation faible	201
9.1.1.3.2	Formulation matricielle	202
9.1.1.3.3	Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson	202
9.1.1.4	Récapitulatif	203
9.1.2	Couple	203
9.1.3	Flux magnétique	204
9.1.3.1	A travers une section d'un pôle magnétique du rotor	204
9.1.3.2	Des bobines	204
9.1.4	Induction magnétique \mathbf{B} en un point	205
9.1.5	Récapitulatif	205
9.2	Machine en 2D magnétique transitoire en éléments nodaux et d'arête	206
9.2.1	Description du problème	206
9.2.1.1	Géométrie	206
9.2.1.2	Maillage	207
9.2.1.3	Formulation en \mathbf{H} intégré d'arête en 2D	207
9.2.1.3.1	Formulation forte	208
9.2.1.3.2	Formulation faible	208
9.2.1.3.3	Formulation matricielle	209
9.2.1.3.4	Approximation des dérivées en temps avec la méthode d'Euler	209
9.2.1.4	Récapitulatif	210
9.2.2	Induction magnétique \mathbf{B} et densité de courant \mathbf{J}_e	211
9.2.2.1	Isovaleurs sur le rotor	211
9.2.2.2	En un point du rotor	214
9.2.2.3	Sur un chemin du rotor	215
9.2.2.4	Sur un chemin selon x en y=0	217

9.3 Conclusion	217
--------------------------	-----

Dans ce chapitre, deux cas tests seront étudiés pour valider la méthode des éléments avec joints en 2D avec des éléments finis nodaux et d'arête, étudiée dans le chapitre 8. La méthode des éléments avec joints n'a pas été implémentée en 3D, elle ne sera donc pas validée.

La première validation est faite sur le problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D magnétostatique, étudié dans la section 5.3. Ce problème permettra de comparer les résultats de la méthode des éléments avec joints en 2D éléments nodaux avec la méthode d'interpolation, étudiée dans la sous-section 7.3.3 et utilisée dans Flux®.

La deuxième validation est faite sur une machine de géométrie simple en 2D magnéto-harmonique. Cette machine permettra de valider la méthode des éléments avec joints en 2D éléments nodaux et d'arête, en comparant les résultats avec ceux de la méthode d'interpolation en éléments nodaux.

9.1 Problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D magnétostatique en éléments nodaux

9.1.1 Description du problème

Le problème 24 du T.E.A.M. Workshop étudié en 2D dans cette section est similaire à celui de la section 5.3. Contrairement à la section 5.3, le rotor de cette machine sera mobile et entouré d'une région d'air. De plus la résolution se fera en régime statique avec le courant des bobines valant $7,41\text{ A}$ (la valeur du courant des bobines au pas de temps final de la figure 5.12a de la sous-section 5.3.1).

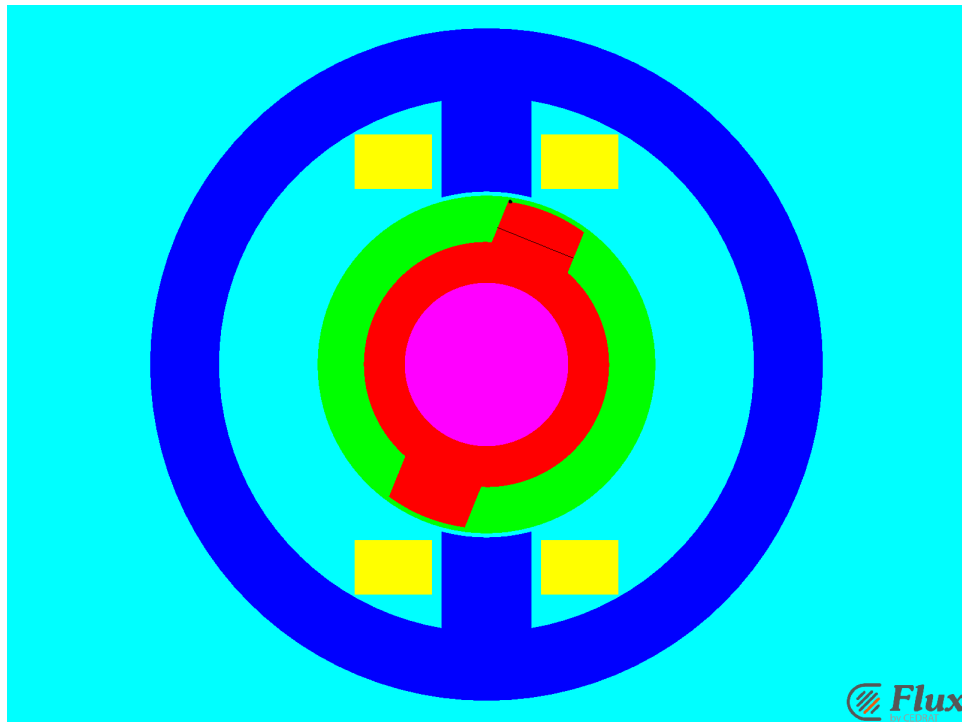


FIGURE 9.1 – Géométrie du problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D

Sur cette machine, les grandeurs étudiées seront le couple, le flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor, le flux dans les bobines et l'induction magnétique \mathbf{B} en un point

dans l'air entre les pôles magnétiques du rotor et du stator. Cette étude permettra de vérifier que la méthode des éléments avec joints, étudiée dans le chapitre 8, donne des bons résultats pour des variables en éléments nodaux, par une comparaison avec la méthode d'interpolation, étudiée dans la sous-section 7.3.3.

9.1.1.1 Géométrie

La géométrie du problème 24 du T.E.A.M. Workshop est décrite sur la figure 9.1. Cette machine est composée de régions nommées stator, rotor, axe et bobines, ces régions sont entourées d'air. Ces différentes régions de la machine sont détaillées dans le tableau 9.1.

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Couleur sur la figure 9.1	Domaine
Air Rotor	μ_0	0	Vert	Ω_m
Rotor	Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 9.2	$4,54 * 10^6 \text{ S.m}^{-1}$	Rouge	Ω_m
Axe	μ_0	$1,4 * 10^7 \text{ S.m}^{-1}$	Rose	Ω_m
Air	μ_0	0	Turquoise	Ω_f
Stator	Courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ 9.2	$4,54 * 10^6 \text{ S.m}^{-1}$	Bleu	Ω_f
Bobine	μ_0	-	Jaune	Ω_f

TABEAU 9.1 – Détails des régions du problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D

Chaque bobine est composée de 350 tours avec un courant valant 7,41 A. Pour modéliser l'infini, une transformation de l'infini est effectuée sur la machine [Brunotte, 1991]. Le stator et le rotor sont séparés par une zone d'air, l'entrefer, dont une partie est la région air du rotor (en vert sur la figure 9.1) et l'autre partie appartient à la région air (en turquoise sur la figure 9.1). Le stator, le rotor et l'axe sont des régions conductrices. L'axe est composé d'un matériau linéaire, alors que le stator et le rotor sont composés du même matériau non-linéaire. Pour ce matériau non-linéaire, la figure 9.2 représente l'induction magnétique \mathbf{B} en fonction du champ magnétique \mathbf{H} . Puisque le problème 24 a un matériau non-linéaire, la méthode de Newton-Raphson, décrite dans l'annexe C, sera utilisée pour résoudre ce problème.

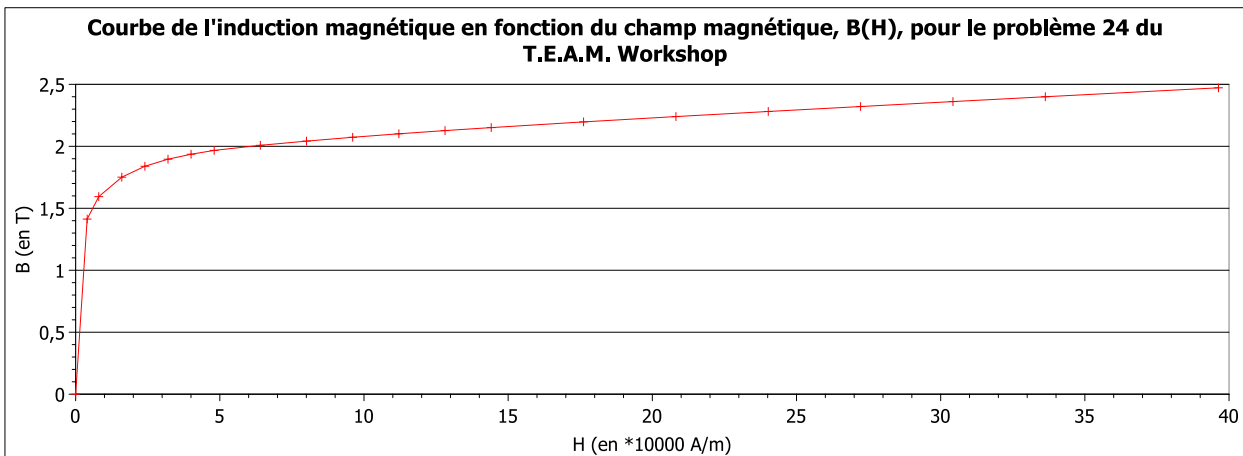


FIGURE 9.2 – Courbe de l'induction magnétique \mathbf{B} en fonction du champ magnétique \mathbf{H} pour le stator et le rotor du problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Le domaine mobile Ω_m est composé des régions rotor et axe et de l'air entourant le rotor, respectivement les régions en rouge, en rose et en verte sur la figure 9.1. Alors que le domaine

9.1. PROBLÈME 24 DU T.E.A.M. WORKSHOP EN 2D MAGNÉTOSTATIQUE EN ÉLÉMENTS NODAUX

fixe Ω_f est composé des régions restantes, i.e. le stator, les bobines et l'air respectivement en bleu, en jaune et en turquoise sur la figure 9.1. Les domaines Ω_m et Ω_f sont donnés dans le tableau 9.1. Le domaine mobile Ω_m est étudié pour des angles entre les domaines fixe et mobile différents à chaque itération, en partant du degré 0 pour finir au degré 360 et en bougeant de 2° à chaque itération.

9.1.1.2 Maillage

Le maillage du problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D est représentée sur la figure 9.3. Il est du deuxième ordre et composé de triangles avec 12 511 nœuds et 6 160 éléments.

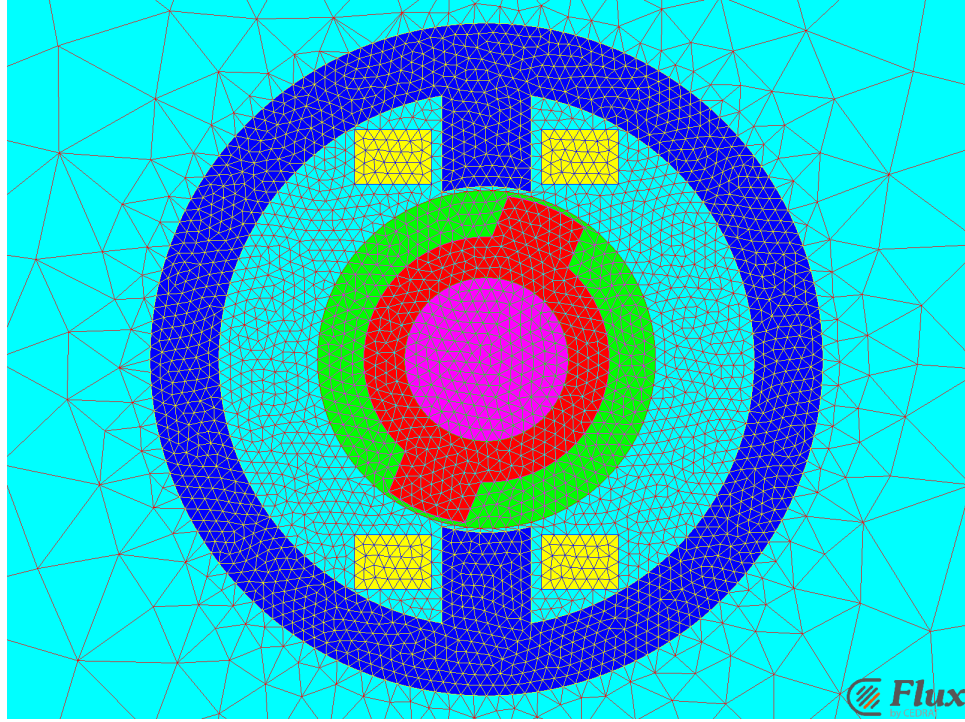


FIGURE 9.3 – Maillage du problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D

9.1.1.3 Formulation en \mathbf{A} nodal en 2D

En 3D, la formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est étudiée en éléments d'arête. En 2D, la formulation en \mathbf{A} est étudiée en éléments nodaux. Cette formulation sera étudiée pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop en 2D.

9.1.1.3.1 Formulation faible

Le problème considéré a un champ magnétique \mathbf{H} tangent dans le plan xy (et une densité de courant \mathbf{J}_e normale au plan xy et selon l'axe z). Donc l'induction magnétique \mathbf{B} est aussi dans le plan xy . Or d'après l'équation (1.10), le rotationnel du potentiel \mathbf{A} découle de \mathbf{B} . Donc le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} peut avoir seulement une composante selon l'axe z , notée A_z . De plus, la composante d' \mathbf{A} selon z est décomposé sur les éléments nodaux de la sous-section 2.2.4 telle que :

$$A_z = \sum_{i=1}^{n_N} A_{z_{n_i}} w_{n_i}, \quad (9.1)$$

avec $A_{z_{n_i}}$ la valeur de la composante en z du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au noeud n_i .

Soit $\mathbf{w}_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{n_i} \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle de forme nodale. Avec cette décomposition du potentiel A_z (9.1), la formulation faible en \mathbf{A} de la magnétostatique (D.3) de l'annexe D.1.1.1 devient :

$$\sum_{i=1}^{n_N} A_{z_{n_i}} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_i}, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^0(\Omega). \quad (9.2)$$

La méthode de Galerkin consiste à définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{n_j}$, avec $1 \leq j \leq n_N$ (car l'équation (9.2) est valable pour tout \mathbf{A}' dans $\mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^0(\Omega)$ donc pour la valeur particulière $\mathbf{w}_{n_j} \in \mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^0(\Omega)$). Alors, la formulation faible en A_z , ou en \mathbf{A} nodal, est avec l'équation (9.2) telle que :

$$\sum_{i=1}^{n_N} A_{z_{n_i}} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_i}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall n_j \in N. \quad (9.3)$$

9.1.1.3.2 Formulation matricielle

Donc, la formulation matricielle en A_z , ou en \mathbf{A} nodal, déduite de la formulation faible (9.3), est telle que :

$$R_{R_n R_{n\nu}} \mathbf{A}_{\mathbf{zn}} = \mathbf{M}_{\mathbf{NJ}_s} + \mathbf{M}_{\mathbf{R_n B_{r\nu}}}, \quad (9.4)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{R_n R_{n\nu}} &= \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_i}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}, \\ - \mathbf{A}_{\mathbf{zn}} &= [A_{z_{n_i}}]_{1 \leq i \leq n_N}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{NJ}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{R_n B_{r\nu}}} &= \left[(\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}. \end{aligned}$$

9.1.1.3.3 Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson

Cependant, si les matériaux sont non-linéaires, alors la perméabilité μ et la réductivité ν dépendent aussi de l'inconnue A_z de la formulation. Donc, la méthode de Newton-Raphson, expliquée dans l'annexe C, est utilisée pour résoudre la formulation matricielle en A_z (9.4), devenue une équation non-linéaire. La méthode de Newton-Raphson consiste à calculer à chaque itération, un vecteur $\mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n+1)}$ à partir du vecteur $\mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n)}$ obtenu à l'itération précédente tel que :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n)} + \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n+1)}. \quad (9.5)$$

$\Delta \mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n+1)}$ est calculé en résolvant la formulation matricielle en A_z (9.4) avec la méthode de Newton-Raphson tel que :

$$R_{R_n R_n} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{zn}}^{(n+1)} = \mathbf{M}_{\mathbf{NJ}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{R_n H}^{(n)}}, \quad (9.6)$$

avec

$$- \mathbf{B}^{(n)} = \mathbf{rot} \mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{H}^{(n)} &= \nu (\mathbf{B}^{(n)}) (\text{rot } \mathbf{A}^{(n)} - \mathbf{B}_r) = \nu (\mathbf{B}^{(n)}) \left(\text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z^{(n)} \end{pmatrix} - \mathbf{B}_r \right), \\
 - R_{R_n R_n} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \text{rot } \mathbf{w}_{n_i}, \text{rot } \mathbf{w}_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}, \\
 - \Delta \mathbf{A}_{z_n}^{(n+1)} &= \mathbf{A}_{z_n}^{(n+1)} - \mathbf{A}_{z_n}^{(n)} = \left[\Delta A_{z_{n_i}}^{(n+1)} \right]_{1 \leq i \leq n_N}, \\
 - \mathbf{M}_{\mathbf{N} \mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}, \\
 - \mathbf{M}_{\mathbf{R}_n \mathbf{H}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{H}^{(n)}, \text{rot } \mathbf{w}_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}.
 \end{aligned}$$

9.1.1.4 Récapitulatif

Finalement avec les méthodes de prise en compte du mouvement pour les éléments finis nodaux, la formulation résolue sera celle en A_z (9.6) avec le solveur ICCG.

Dans cette sous-section, la géométrie, le maillage et la formulation du problème 24 du T.E.A.M. Workshop ont été étudiés. Dans les prochaines sous-sections, le couple, le flux et l'induction magnétique \mathbf{B} en un point seront étudiés sur ce problème. De plus dans les prochaines figures représentant ces résultats, la couleur rouge représentera la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du deuxième ordre décrite dans le paragraphe 9.1.1.3, les carrés représenteront la méthode des éléments avec joints étudiée dans le chapitre 8 et les croix la méthode d'interpolation décrite dans la sous-section 7.3.3.

9.1.2 Couple

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop, le couple des régions rotor et axe en fonction de l'angle du rotor par rapport au stator est représenté sur la figure 9.4 pour la formulation en \mathbf{A} nodal (9.6) avec le maillage non-conforme raccordé soit par la méthode des éléments avec joints, soit par la méthode d'interpolation.

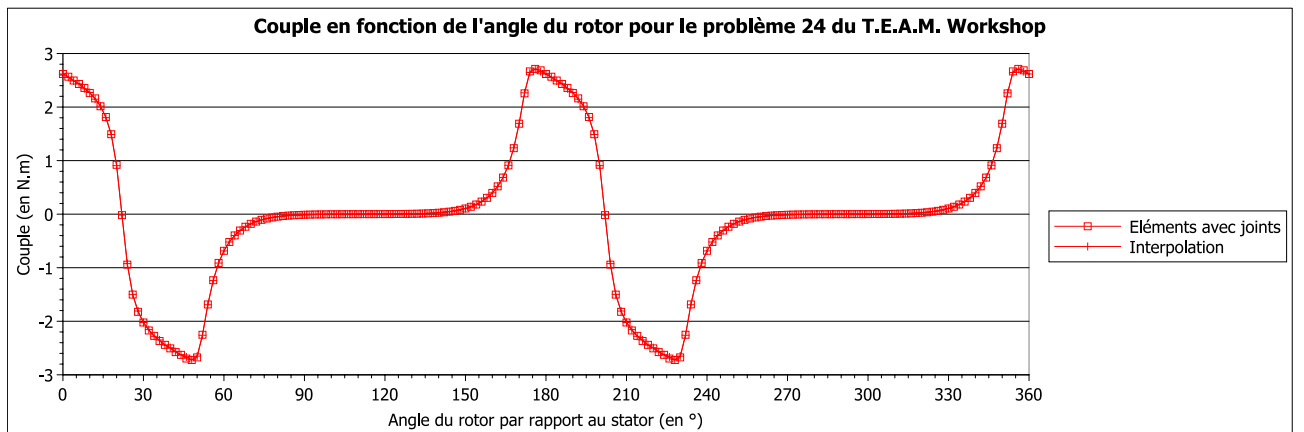


FIGURE 9.4 – Couple en fonction de l'angle du rotor pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Sur cette figure 9.4, les résultats pour le couple sont identiques que le maillage soit raccordé par la méthode des éléments avec joints ou celle d'interpolation. Donc, ces deux méthodes sont équivalentes pour le couple. Dans la prochaine sous-section, l'équivalence de ces deux méthodes sera vérifiée avec le flux magnétique.

9.1.3 Flux magnétique

9.1.3.1 A travers une section d'un pôle magnétique du rotor

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop, le flux magnétique traversant une section d'un pôle magnétique du rotor en fonction de l'angle du rotor par rapport au stator est représenté sur la figure 9.5. La ligne du pôle du rotor, sur laquelle est calculée le flux, est visible en noire sur la figure 9.1.

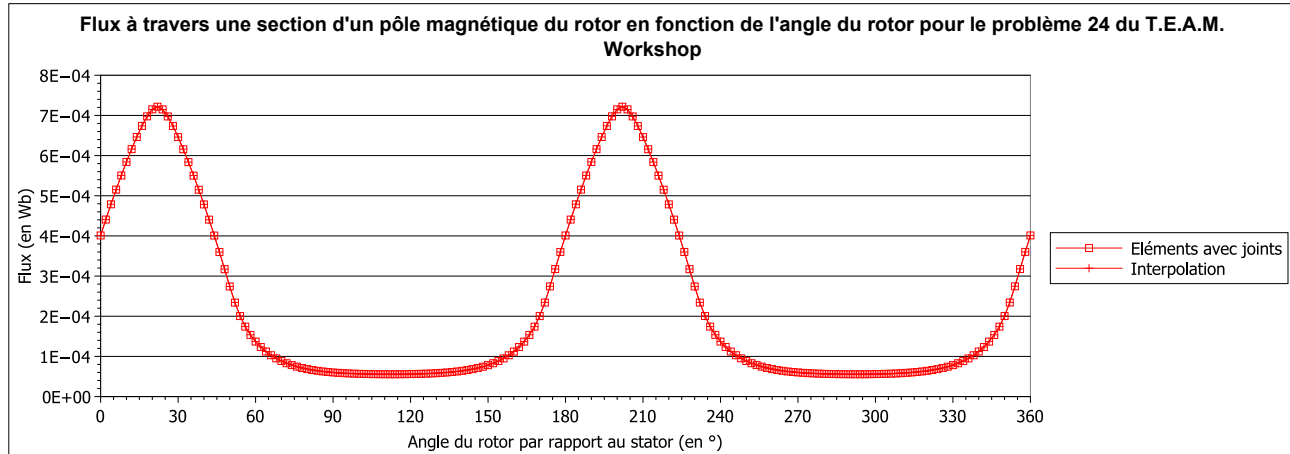


FIGURE 9.5 – Flux à travers une section d'un pôle magnétique du rotor en fonction de l'angle du rotor pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Le flux à travers une section d'un pôle du rotor est identique pour les deux méthodes de raccordement de maillage, les éléments avec joints et l'interpolation. Dans le prochain paragraphe, le flux des bobines sera étudié.

9.1.3.2 Des bobines

La figure 9.6 représente le flux à travers les bobines en fonction de l'angle du rotor par rapport au stator pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop.

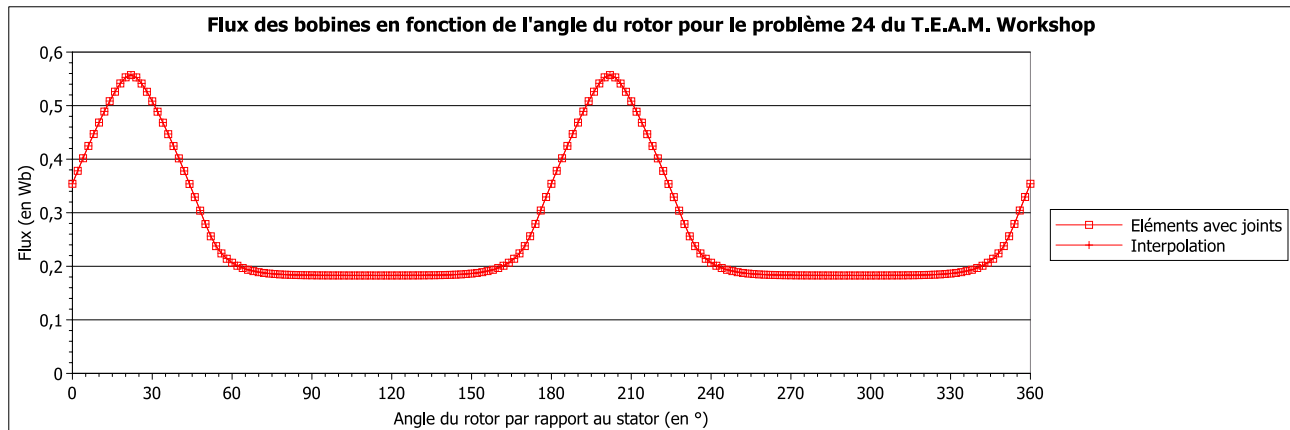


FIGURE 9.6 – Flux à travers les bobines en fonction de l'angle du rotor pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

Le flux des bobines est identique pour la méthode des éléments avec joints et la méthode d'interpolation. Finalement, ces deux méthodes de raccordement de maillage donnent des bons résultats pour des grandeurs globales comme le couple et le flux. Dans la prochaine sous-section, une grandeur locale sera étudiée, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point.

9.1.4 Induction magnétique \mathbf{B} en un point

Pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point du domaine fixe situé entre les pôles magnétiques du rotor et du stator en fonction de l'angle du rotor par rapport au stator est représentée sur la figure 9.7. Le point de calcul de \mathbf{B} est en noir sur la figure 9.1.

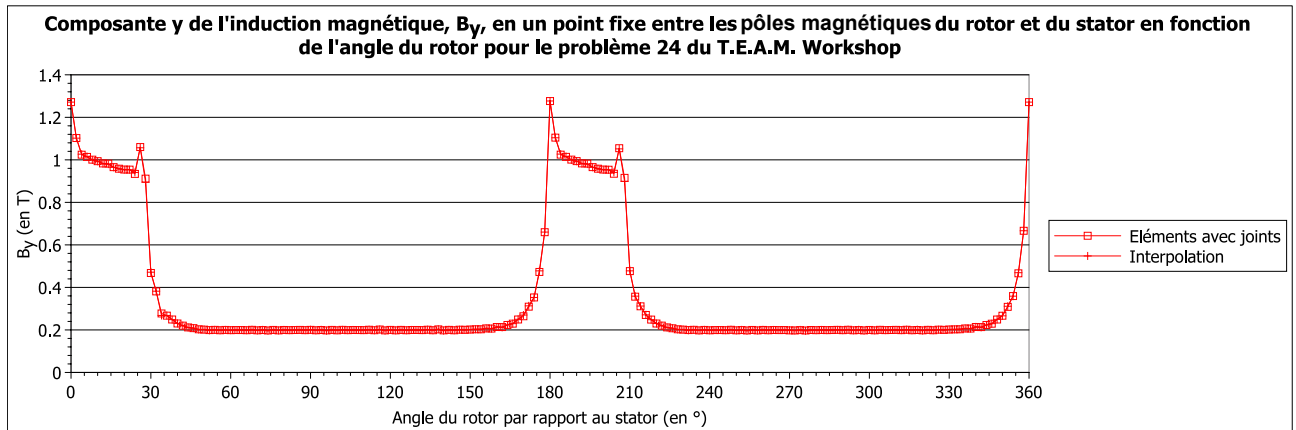


FIGURE 9.7 – Composante en y de l'induction magnétique, B_y , en un point du domaine fixe dans l'entrefer en fonction de l'angle du rotor pour le problème 24 du T.E.A.M. Workshop

La composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} est identique avec les méthodes des éléments avec joints et d'interpolation.

9.1.5 Récapitulatif

Lorsque le rotor du problème 24 du T.E.A.M. Workshop tourne et que le maillage devient non-conforme, il faut assurer la continuité des grandeurs physiques à l'interface entre le rotor et le stator par une méthode de raccordement de maillage. La méthode des éléments avec joints a été développée pour raccorder le maillage. Le but de cette section était de valider la méthode des éléments avec joints en éléments finis nodaux 2D, en la comparant avec la méthode d'interpolation. Finalement pour le problème 24 en 2D résolu avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux, la méthode des éléments avec joints donne les mêmes résultats que la méthode d'interpolation pour des grandeurs globales comme le couple du rotor et le flux à travers un pôle du rotor ou des bobines, et pour une grandeur locale, la composante en y de l'induction magnétique \mathbf{B} en un point. Donc, la méthode des éléments avec joints raccorde le maillage correctement à l'interface entre les domaines fixe et mobile pour des éléments finis nodaux en 2D.

Dans la prochaine section, une machine de géométrie simple en 2D sera étudiée pour la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête. En éléments finis d'arête, l'interpolation est difficile à implémenter, c'est pourquoi seuls les éléments avec joints seront implémentés.

9.2 Machine en 2D magnétique transitoire en éléments nodaux et d'arête

9.2.1 Description du problème

Dans cette section, une machine de géométrie simple est étudiée en deux dimensions et en régime transitoire avec le rotor en mouvement à une vitesse de 610 tours par minute. Les périodes de temps étudiées varient de 0 à 200 millisecondes avec des pas de temps toutes les 1 millisecondes, parce que la vitesse du rotor est de 610 tr/min, ce qui est équivalent à 3,66 degrés par milliseconde. A 200 millisecondes, le rotor a fait un peu plus de deux tours.

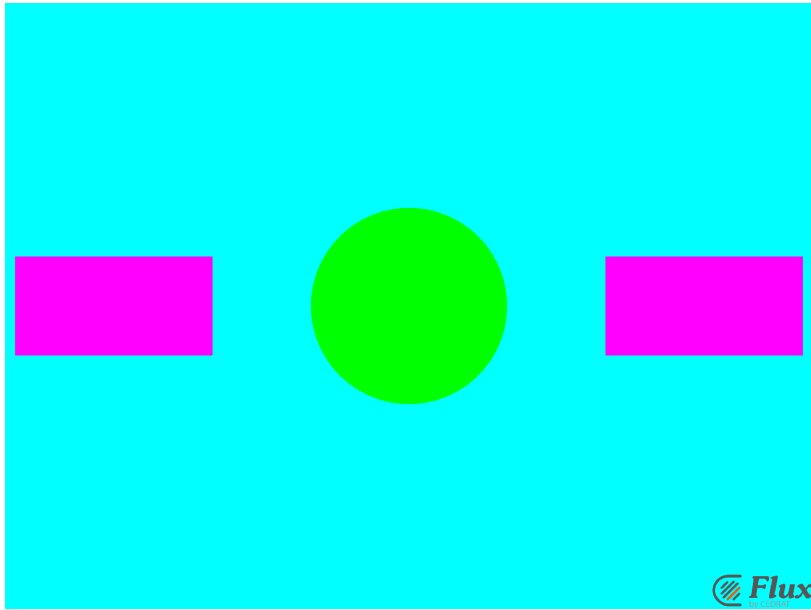


FIGURE 9.8 – Géométrie de la machine en 2D

Sur cette machine, les valeurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la densité de courant \mathbf{J}_e sur le rotor, en un point, sur un chemin du rotor et selon x en $y = 0$ seront étudiés pour la méthode des éléments avec joints en éléments nodaux et d'arête, décrite dans le chapitre 8, et pour la méthode d'interpolation en éléments nodaux, décrite dans la sous-section 7.3.3. Ce problème a pour objectif de valider la méthode des éléments avec joints en éléments nodaux et d'arête.

9.2.1.1 Géométrie

La géométrie de la machine en 2D est décrite sur la figure 9.8. Cette machine est composée d'un rotor et de deux aimants, le tout entouré d'air. Ces différentes régions de la machine sont détaillées dans le tableau 9.2.

L'induction magnétique rémanente des aimants B_r est de 0,8 T. Pour modéliser l'infini, une transformation de l'infini, qui n'est pas représentée sur la figure 9.8 mais sur la figure 9.12, est effectuée sur la machine [Brunotte, 1991]. Dans le paragraphe 9.2.1.3, il sera expliqué pourquoi les régions pseudo-air et aimant ont une conductivité non nulle.

Pour les méthodes de prise en compte du mouvement, le domaine mobile Ω_m contient le rotor (en vert sur la figure 9.8) alors que le domaine fixe Ω_f contient les aimants et le pseudo-

9.2. MACHINE EN 2D MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE EN ÉLÉMENTS NODAUX ET D'ARÊTE

Région	Perméabilité μ	Conductivité σ	Couleur sur la figure 9.8	Domaine
Rotor	$1000 \mu_0$	$1000 S.m^{-1}$	Vert	Ω_m
Pseudo-Air	μ_0	$10^{-5} S.m^{-1}$	Turquoise	Ω_f
Aimant	$1,05 \mu_0$	$10^{-5} S.m^{-1}$	Rose	Ω_f

TABLEAU 9.2 – Détails des régions de la machine de géométrie simple en 2D

air (respectivement en rose et en turquoise sur la figure 9.8). Le domaine Ω_m a un mouvement de rotation selon l'axe z . Les domaines Ω_m et Ω_f sont donnés pour chaque région dans le tableau 9.2.

9.2.1.2 Maillage

Le maillage de la machine de géométrie simple en 2D est représenté sur la figure 9.9. Il est du deuxième ordre et composé de 21 532 triangles avec 43 311 nœuds.

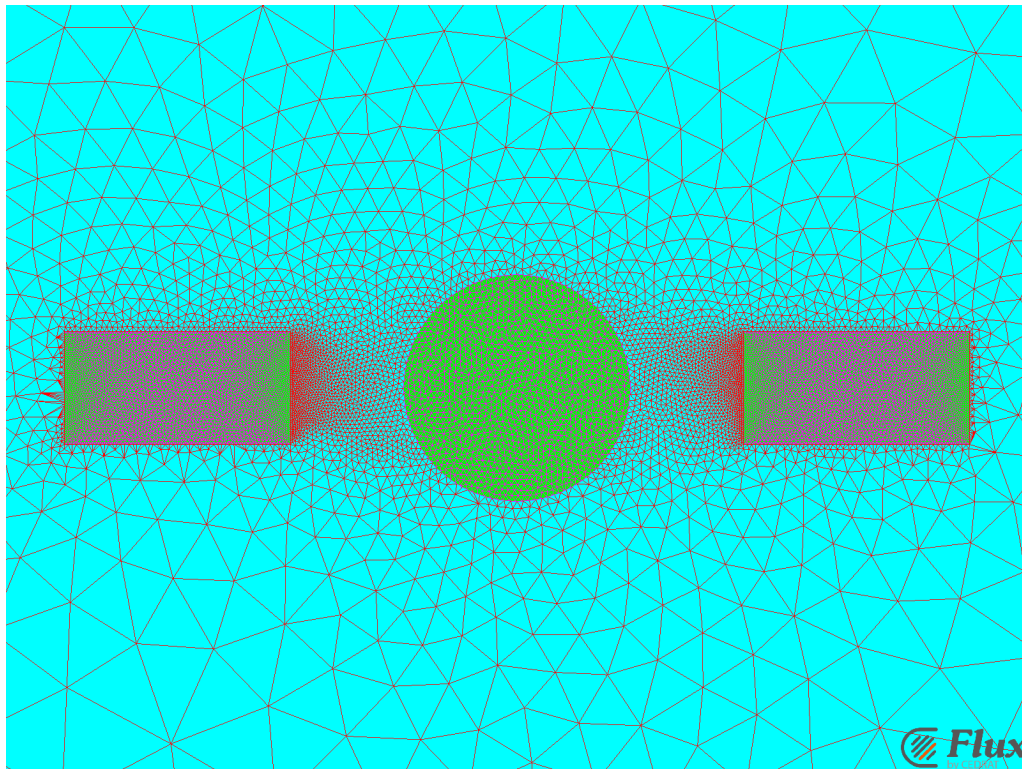


FIGURE 9.9 – Maillage de la machine de géométrie simple en 2D

9.2.1.3 Formulation en \mathbf{H} intégré d'arête en 2D

Pour la machine de cette section 9.2, il n'y a pas de bobines. Donc, la densité de courant source \mathbf{J}_s n'est pas considérée, puisqu'elle est nulle.

9.2.1.3.1 Formulation forte

Dans la section 1.3, le modèle magnétique transitoire (1.15) a été décrit. D'après l'équation de Maxwell-Ampère $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_e$ (1.15a) et les lois de comportement $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r$ (1.15f) et $\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$ (1.15g) de ce modèle (1.15), l'équation de Maxwell-Faraday $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (1.15b) devient avec les conditions aux limites (1.15h) et (1.15i) telle que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \right) + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial t}, \quad (9.7a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (9.7b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}. \quad (9.7c)$$

La formulation forte en \mathbf{H} (9.7) comporte une dérivée en temps de \mathbf{B}_r , $\frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial t}$. Pour simplifier cette formulation, l'équation (9.7a) est intégrée dans le temps afin d'obtenir un terme source en \mathbf{B}_r au lieu de $\frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial t}$.

Soit \mathbf{H}_{int} le champ magnétique \mathbf{H} intégré dans le temps tel que :

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \int_0^t \mathbf{H}(t) dt, \quad (9.8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}}}{\partial t} = \mathbf{H}. \quad (9.8b)$$

En intégrant l'équation (9.7) dans le temps, la formulation forte en \mathbf{H}_{int} devient avec la définition d' \mathbf{H}_{int} (9.8) telle que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}} \right) + \mu \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}}}{\partial t} = -\mathbf{B}_r, \quad (9.9a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\text{int}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (9.9b)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}. \quad (9.9c)$$

9.2.1.3.2 Formulation faible

En appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, au champ magnétique intégré \mathbf{H}_{int} et à une fonction test \mathbf{H}' à définir, la formulation forte en \mathbf{H}_{int} (9.9) devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{rot} \mathbf{H}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\langle \frac{1}{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}' \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}}}{\partial t}, \mathbf{H}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ = -(\mathbf{B}_r, \mathbf{H}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}$ (9.9c) de la formulation forte en \mathbf{H}_{int} , le terme $\left\langle \frac{1}{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}' \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\left\langle \frac{1}{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}' \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_h)}$, car $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$. Donc l'espace $\mathbf{E}_{\text{ho}}^1(\Omega) = \{\mathbf{H}' \in \mathbf{E}_h^1(\Omega), \mathbf{H}'|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}\}$ est défini pour la fonction test \mathbf{H}' tel que $\mathbf{rot} \mathbf{H}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\left\langle \frac{1}{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{int}}, \mathbf{H}' \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_h)} = 0$.

9.2. MACHINE EN 2D MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE EN ÉLÉMENTS NODAUX ET D'ARÊTE

Alors en ajoutant la condition à la limite (9.9b) à l'équation (9.10), la formulation faible en \mathbf{H}_{int} , déduite de la formulation forte (9.9), est telle que :
Trouver $\mathbf{H}_{\text{int}} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ tel que

$$\left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H}_{\text{int}}, \text{rot } \mathbf{H}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}}}{\partial t}, \mathbf{H}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = -(\mathbf{B}_r, \mathbf{H}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (9.11a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\text{int}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{E}_{\text{ho}}^1(\Omega). \quad (9.11b)$$

9.2.1.3.3 Formulation matricielle

En injectant la décomposition du champ \mathbf{H}_{int} similaire à celle du potentiel \mathbf{A} (2.44) du paragraphe 2.2.4.5 sur les éléments finis, l'équation (9.11a) de la formulation faible en \mathbf{H}_{int} (9.11) devient :

$$\sum_{k=1}^{n_A} \left[H_{\text{int}_{a_k}} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \text{rot } \mathbf{H}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\partial H_{\text{int}_{a_k}}}{\partial t} (\mu \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{H}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] = -(\mathbf{B}_r, \mathbf{H}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{W}_{\text{ho}}^1(\Omega). \quad (9.12)$$

La méthode de Galerkin consiste à définir la fonction test \mathbf{H}' telle que $\mathbf{H}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$ (car l'équation (9.12) est valable pour tout \mathbf{H}' dans $\mathbf{W}_{\text{ho}}^1(\Omega)$ donc pour la valeur particulière $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \in \mathbf{W}_{\text{ho}}^1(\Omega)$). Alors la formulation (9.12) devient :

$$\sum_{k=1}^{n_A} \left[H_{\text{int}_{a_k}} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\partial H_{\text{int}_{a_k}}}{\partial t} (\mu \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] = -(\mathbf{B}_r, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall a_l \in A. \quad (9.13)$$

L'équation (9.13) prend en compte faiblement la condition à la limite sur le bord Γ_e pour le champ \mathbf{H}_{int} comme la formulation faible en \mathbf{H}_{int} (9.11), mais elle ne prend pas en compte la condition à la limite sur Γ_h pour \mathbf{H}_{int} . Alors avec l'équation (9.13), la formulation matricielle en \mathbf{H}_{int} , déduite de la formulation faible (9.11), est telle que :

$$R_{RR_{\frac{1}{\sigma}}} \mathbf{H}_{\text{int}_{\mathbf{a}}} + R_{AA_{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}_{\mathbf{a}}}}{\partial t} = -\mathbf{M}_{\mathbf{AB}_r}, \quad (9.14a)$$

$$\mathbf{H}_{\text{int}_{\mathbf{a}}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (9.14b)$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR_{\frac{1}{\sigma}}} &= \left[\left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{H}_{\text{int}_{\mathbf{a}}} &= [H_{\text{int}_{a_k}}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - R_{AA_{\mu}} &= [(\mu \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{AB}_r} &= [(\mathbf{B}_r, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}]_{1 \leq l \leq n_A}. \end{aligned}$$

9.2.1.3.4 Approximation des dérivées en temps avec la méthode d'Euler

En régime transitoire, les dérivées temporelles de la formulation en \mathbf{H}_{int} (9.14) sont approximées par la méthode d'Euler, décrite dans l'annexe B. La méthode d'Euler est une méthode itérative permettant d'approcher une dérivée par rapport au temps. Soit le temps $t \in [0, T]$,

pour la machine de géométrie simple $t \in [0, 200ms]$. L'intervalle $[0, T]$ est divisé en n sous-intervalles $[t_{(j)}, t_{(j+1)}]$, avec $0 \leq j \leq n-1$ et $t_{(j)} < t_{(j+1)}$, tel que $[0, T] = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} [t_{(j)}, t_{(j+1)}]$.

Soit $\Delta t_{(j)} = t_{(j+1)} - t_{(j)}$ le pas de temps à l'itération j . Pour la machine de géométrie simple, on a $\Delta t_{(j)} = 1$ ms. Avec la méthode d'Euler, une solution approchée du champ magnétique intégré \mathbf{H}_{int} est calculée à chaque temps $t_{(j)}$, notée $\mathbf{H}_{\text{int}}(t_{(j)})$ ou $\mathbf{H}_{\text{int}(j)}$ pour simplifier.

Soit $\theta \in [0, 1]$. A l'itération $j+1$, le champ \mathbf{H}_{int} et sa dérivée $\frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}}}{\partial t}$ sont approchés, avec les équations (B.5) et (B.6) de la méthode d'Euler, tels que :

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \theta \mathbf{H}_{\text{int}(j+1)} + (1 - \theta) \mathbf{H}_{\text{int}(j)}, \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{\text{int}}}{\partial t} = \frac{\mathbf{H}_{\text{int}(j+1)} - \mathbf{H}_{\text{int}(j)}}{\Delta t_{(j)}}. \quad (9.16)$$

En appliquant les formules (9.15) et (9.16) sur le champ \mathbf{H}_{int} , la formulation matricielle en \mathbf{H}_{int} (9.14) est avec la méthode d'Euler telle que :

$$\left(\theta R_{RR_{\frac{1}{\sigma}}} + \frac{R_{AA_{\mu}}}{\Delta t_{(j)}} \right) \mathbf{H}_{\text{inta}(j+1)} = \left(-(1 - \theta) R_{RR_{\frac{1}{\sigma}}} + \frac{R_{AA_{\mu}}}{\Delta t_{(j)}} \right) \mathbf{H}_{\text{inta}(j)} - \mathbf{M}_{\text{ABr}}, \quad (9.17a)$$

$$\mathbf{H}_{\text{inta}(j+1)} \Big|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}, \quad (9.17b)$$

avec

- $\theta \in [0, 1]$ fixé par le schéma choisi (voir l'annexe B),
- $R_{RR_{\frac{1}{\sigma}}} = \left[\left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}$,
- $R_{AA_{\mu}} = \left[(\mu \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}$,
- $\Delta t_{(j)}$ le pas de temps,
- $\mathbf{H}_{\text{inta}(j+1)} = \left[H_{\text{inta}_k(j+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}$ (au temps $t_{(j+1)}$),
- $\mathbf{H}_{\text{inta}(j)} = \left[H_{\text{inta}_k(j)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}$ (au temps $t_{(j)}$),
- $\mathbf{M}_{\text{ABr}} = \left[(\mathbf{B}_r, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}$.

Cependant le défaut de cette formulation (9.17) est que la conductivité σ doit être non nulle. Il n'est donc pas possible d'avoir des matériaux non-conducteurs dans le dispositif, comme de l'air par exemple. C'est pourquoi dans le cas de la machine de géométrie simple, un pseudo-air est utilisé. Le pseudo-air et les aimants ont une conductivité de $10^{-5} S.m^{-1}$, très faible par rapport à celle du rotor valant $1000 S.m^{-1}$.

9.2.1.4 Récapitulatif

Finalement pour la machine de géométrie simple avec les méthodes de prise en compte du mouvement en éléments finis nodaux, les éléments avec joints ou l'interpolation, la formulation résolue sera celle en A_z (9.6), présentée dans le paragraphe 9.1.1.3. Avec la méthode des éléments avec joints en éléments finis d'arête, la formulation résolue sera celle en \mathbf{H}_{int} (9.17), présentée dans ce paragraphe. Ces deux formulations seront résolues avec le solveur MUMPS.

Dans cette sous-section, la géométrie, le maillage et les formulations de la machine de géométrie simple ont été étudiés. Dans les prochaines sous-sections, l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J}_e seront étudiées sur le rotor, en un point et sur différents chemins

pour cette machine de géométrie simple. De plus dans les prochaines figures représentant ces résultats, les croix représenteront la méthode d'interpolation décrite dans la sous-section 7.3.3 et les carrés représenteront la méthode des éléments avec joints étudiée dans le chapitre 8. Les couleurs bleues et rouges représenteront la formulation en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux respectivement du premier ordre et du deuxième ordre, détaillée dans le paragraphe 9.1.1.3, et la couleur orange représentera la formulation en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis d'arête du premier ordre, décrite dans le paragraphe 9.2.1.3.

9.2.2 Induction magnétique \mathbf{B} et densité de courant \mathbf{J}_e

Sur les figures 9.10, 9.11, 9.13 et 9.14, l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J}_e sont étudiées pour la machine de géométrie simple en 2D en un point en fonction du temps ou sur un chemin au dernier pas de temps selon x ou sur le rotor. Les formulations étudiées sur ces figures sont celle en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux du premier et du deuxième ordre, détaillée dans le paragraphe 9.1.1.3, et celle en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis d'arête du premier ordre, détaillée dans le paragraphe 9.2.1.3. Avec ces formulations, le module de \mathbf{B} , $|\mathbf{B}|$, et la seule composante de \mathbf{J}_e non nulle, celle en z , J_{ez} , sont représentés. Pour prendre en compte le mouvement, la méthode des éléments avec joints, décrite dans le chapitre 8, est utilisée avec les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{H}_{int} . La méthode d'interpolation, donnée dans la sous-section 7.3.3, est aussi utilisée avec la formulation en \mathbf{A} . Le but de cette sous-section est de vérifier que la méthode des éléments avec joints avec des éléments nodaux et d'arête donne les mêmes résultats que la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux.

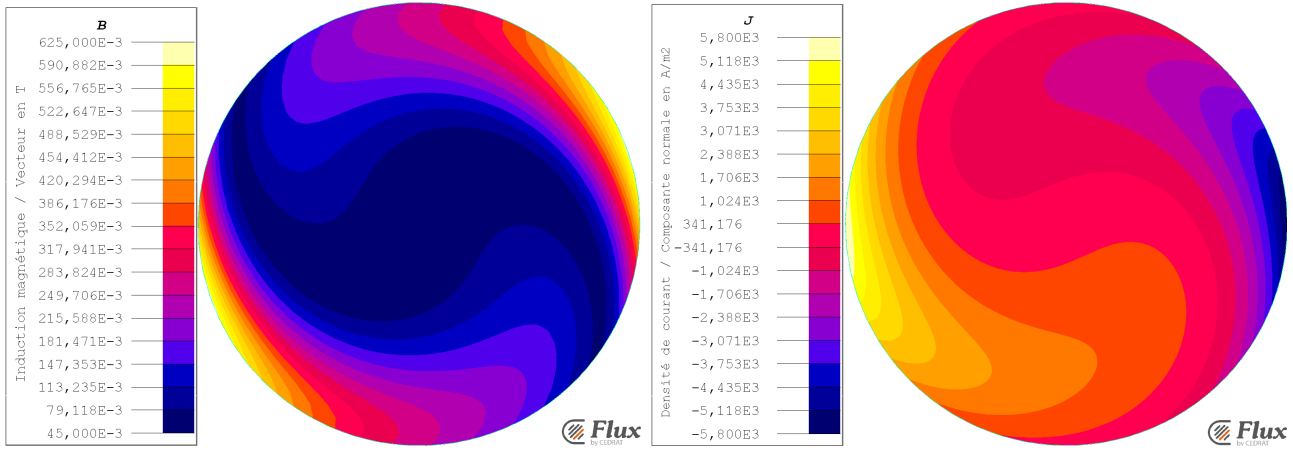
9.2.2.1 Isovaleurs sur le rotor

Sur la figure 9.10, les isovaleurs du module de l'induction magnétique \mathbf{B} et la composante en z de la densité de courant \mathbf{J}_e sont étudiées au dernier pas de temps pour la machine de géométrie simple. L'induction magnétique $|\mathbf{B}|$ est représentée sur les figures de gauche 9.10a, 9.10c et 9.10e, alors que la densité de courant J_{ez} est représentée sur les figures de droite 9.10b, 9.10d et 9.10f. La formulation étudiée sur les figures 9.10a, 9.10b, 9.10c et 9.10d est celle en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux du deuxième ordre et sur les figures 9.10e et 9.10f, la formulation étudiée est celle en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis d'arête du premier ordre. Pour prendre en compte le mouvement, la méthode des éléments avec joints est utilisée avec les formulations en \mathbf{A} nodal sur les figures 9.10c et 9.10d et en \mathbf{H}_{int} d'arête sur les figures 9.10e et 9.10f. La méthode d'interpolation est aussi utilisée avec la formulation en \mathbf{A} nodal sur les figures 9.10a et 9.10b.

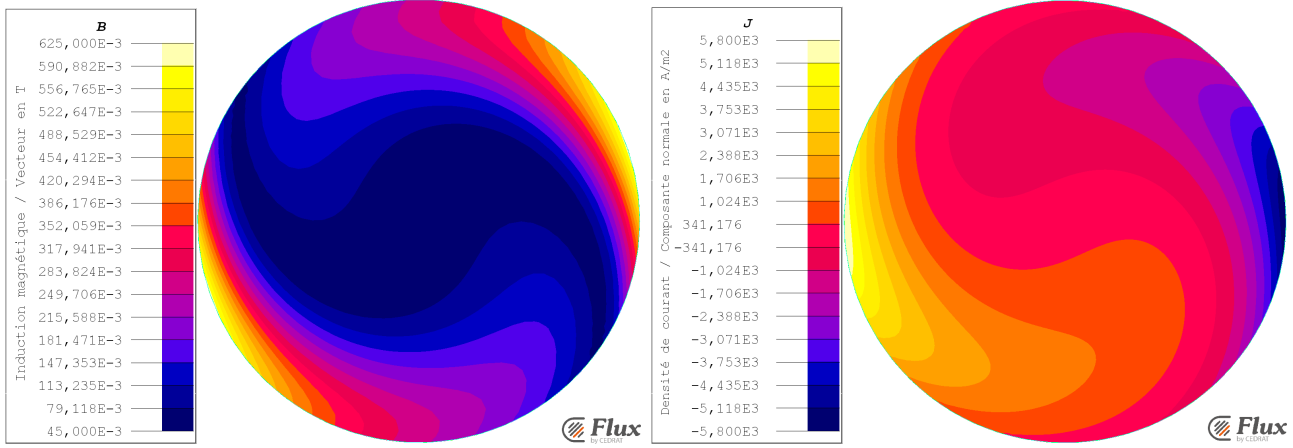
Sur la figure 9.10, les isovaleurs de $|\mathbf{B}|$ sur le rotor sont identiques pour la méthode des éléments avec joints avec des éléments nodaux et d'arête et pour la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. De la même façon, les isovaleurs de J_{ez} sur le rotor sont identiques dans tous les cas.

Dans ce paragraphe, les isovaleurs de $|\mathbf{B}|$ et J_{ez} ont été étudiées avec différentes méthodes de prise en compte du mouvement. La méthode des éléments avec joints avec des éléments finis d'arête pour la formulation en \mathbf{H}_{int} donne des bons résultats par rapport aux méthodes d'interpolation et des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux pour la formulation en \mathbf{A} .

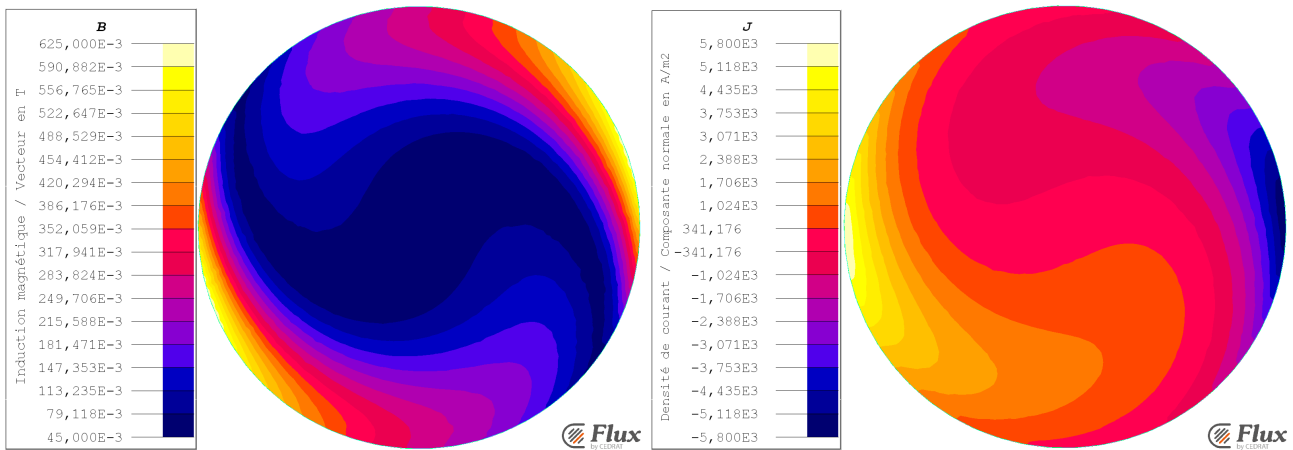
Dans le prochain paragraphe, la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête sera étudiée sur un point du rotor en fonction du temps.



(a) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode d'interpolation pour des éléments nodaux (b) J_{ez} avec la méthode d'interpolation pour des éléments nodaux



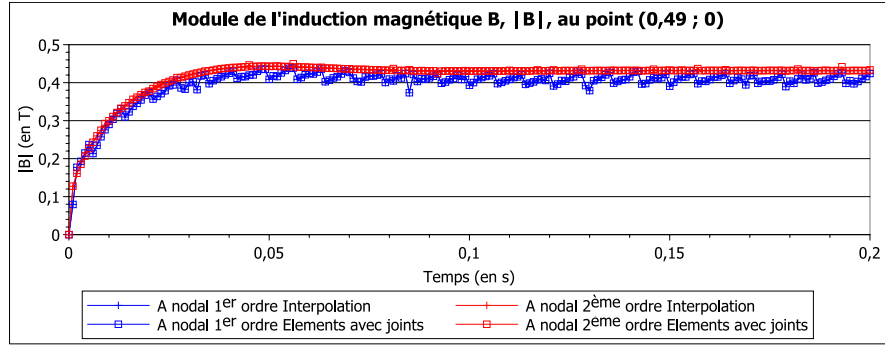
(c) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux (d) J_{ez} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



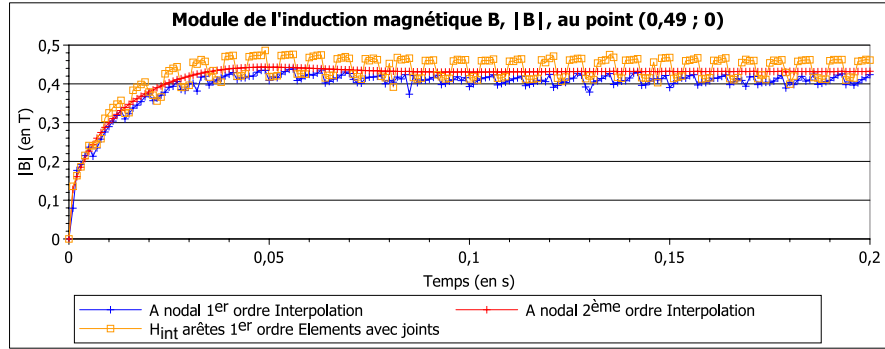
(e) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête (f) J_{ez} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête

FIGURE 9.10 – Isovaleurs de l'induction magnétique \mathbf{B} et de la composante en z de la densité de courant \mathbf{J}_e pour la machine de géométrie simple en 2D

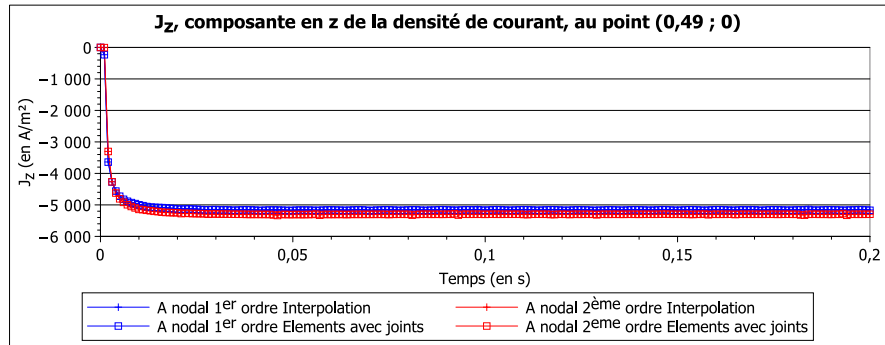
9.2. MACHINE EN 2D MAGNÉTIQUE TRANSITOIRE EN ÉLÉMENTS NODAUX ET D'ARÊTE



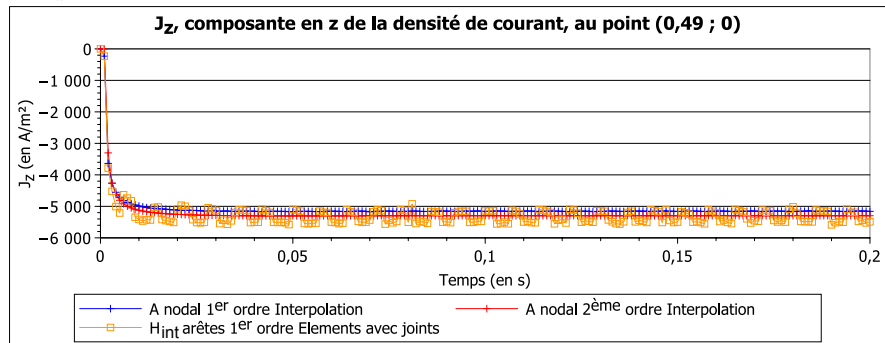
(a) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



(b) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête



(c) J_{e_z} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



(d) J_{e_z} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête

FIGURE 9.11 – Module de l'induction magnétique \mathbf{B} et composante en z de la densité de courant \mathbf{J}_e au point $(x = 0,49; y = 0)$ du rotor en fonction du temps pour la machine de géométrie simple

9.2.2.2 En un point du rotor

La machine de géométrie simple en 2D est étudiée en magnétique transitoire. Sur la figure 9.11, l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J}_e sont étudiées à chaque pas de temps de la résolution magnétique transitoire au point du rotor ($x = 0; y = 0,49$) du repère fixe, sachant que le rayon du rotor est de 0,5. Sur cette figure 9.11, les formulations étudiées sont celle en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux du premier ordre et du deuxième ordre et celle en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis d'arête du premier ordre.

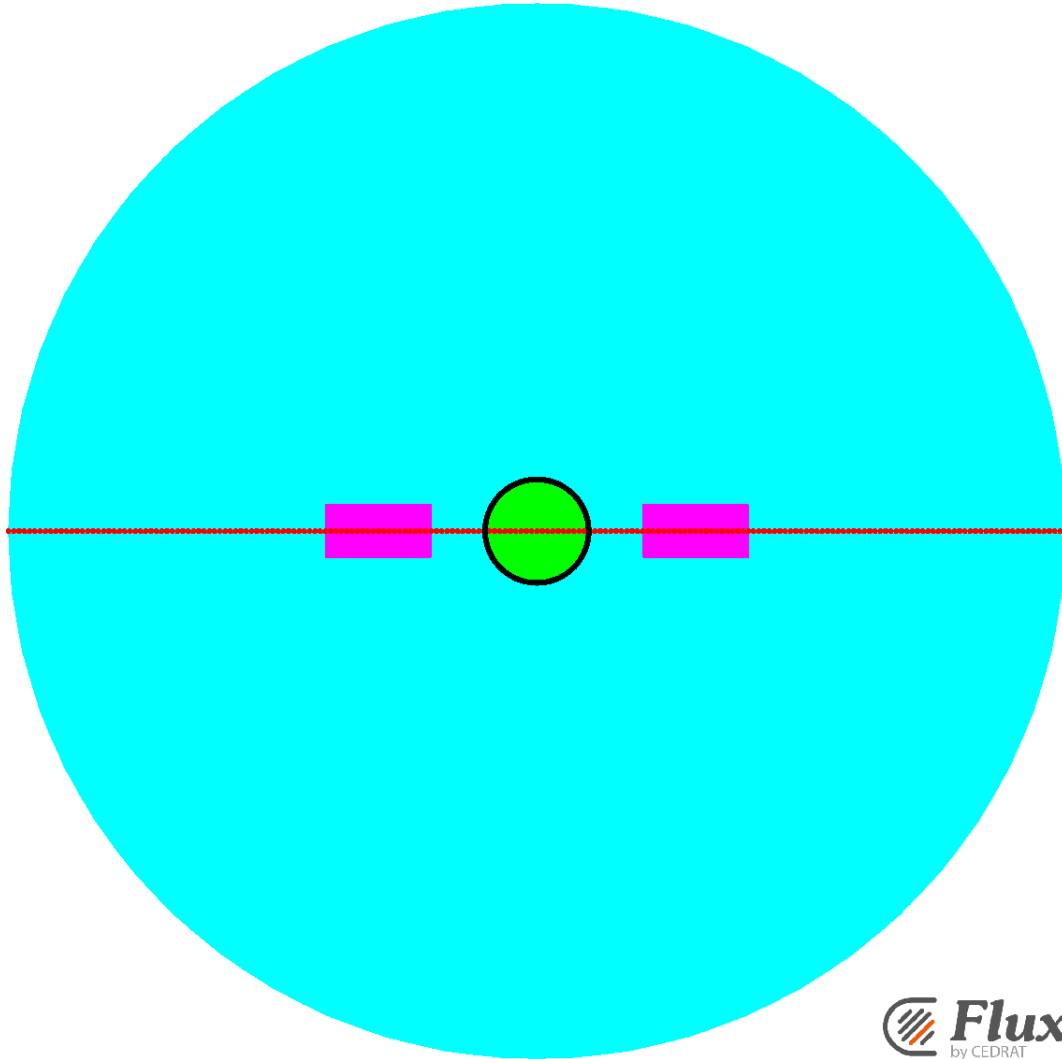


FIGURE 9.12 – Chemin pour calculer $|B|$ et J_{ez} de la machine de géométrie simple en 2D

Les figures 9.11a et 9.11b représentent le module de l'induction magnétique, $|\mathbf{B}|$ en fonction du temps pour la méthode des éléments avec joints respectivement avec des éléments nodaux et d'arête, en la comparant à la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. Sur la figure 9.11a, les résultats sont identiques pour les méthodes d'interpolation et des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du deuxième ordre. De même, les résultats sont identiques pour les méthodes d'interpolation et des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier ordre. Mais, les résultats avec des éléments nodaux du premier ordre oscillent autour de ceux du deuxième ordre. Pour la méthode des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{H}_{int} avec des éléments d'arête du premier ordre, les résultats de la figure 9.11b sont similaires à ceux de la méthode d'interpolation avec la

formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre, mais ils oscillent autour de la solution. Les oscillations des formulations en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier ordre et en \mathbf{H}_{int} avec des éléments d'arête du premier ordre sont dues à l'interpolation avec des fonctions du premier ordre.

Les figures 9.11c et 9.11d représentent la densité de courant \mathbf{J}_e en fonction du temps pour la méthode des éléments avec joints respectivement avec des éléments nodaux et d'arête, en la comparant à la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. La composante de \mathbf{J}_e représentée est celle en z , parce que c'est la seule composante de \mathbf{J}_e non nulle. Sur la figure 9.11c, les résultats de J_{ez} en fonction du temps sont identiques pour les méthodes d'interpolation et des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre. Sur la figure 9.11d, les résultats de J_{ez} sont similaires pour la méthode des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{H}_{int} en éléments d'arête du premier ordre et la méthode d'interpolation avec la formulation en \mathbf{A} en éléments nodaux du premier et du deuxième ordre. La formulation en \mathbf{H}_{int} oscille aussi pour J_{ez} , mais la formulation en \mathbf{A} du premier ordre n'oscille pas. Le calcul de J_{ez} avec la formulation en \mathbf{H}_{int} se fait par une dérivée dans l'espace du champ \mathbf{H}_{int} , ce qui n'est pas le cas pour la formulation en \mathbf{A} . Donc les oscillations de J_{ez} sont causées par la dérivée dans l'espace des fonctions du premier ordre.

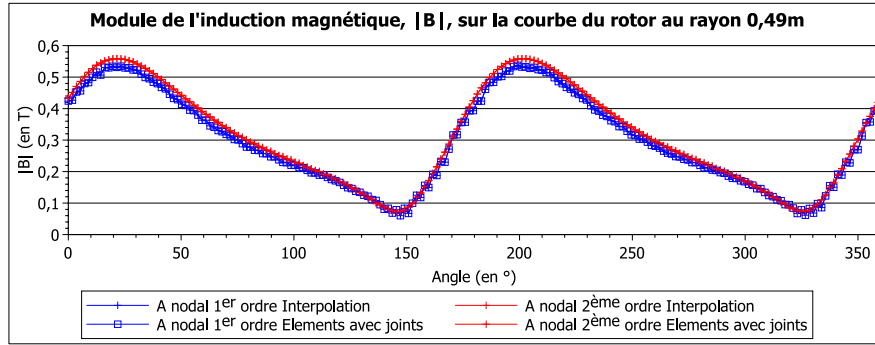
Dans ce paragraphe, l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J}_e ont été étudiées en un point du rotor pour les méthodes d'interpolation et des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments finis nodaux du premier et du deuxième ordre et pour la méthode des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis d'arête du premier ordre. Les résultats sont similaires dans tous les cas. Cependant, les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis nodaux ou d'arête du premier ordre oscillent autour de la solution. Ces oscillations sont donc dus à la dérivée dans l'espace par des éléments finis du premier ordre et à la dérivée en temps pour \mathbf{H}_{int} . Mais, les résultats obtenus avec la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête sont considérés bons.

Dans ce paragraphe, l'étude a porté sur un point du rotor en fonction du temps. Dans le prochain paragraphe, l'étude sera faite au dernier pas de temps et sur un chemin du rotor.

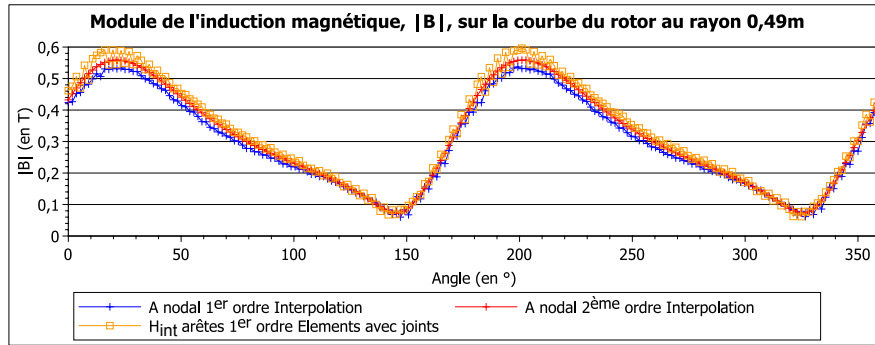
9.2.2.3 Sur un chemin du rotor

Sur la figure 9.13, l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J}_e sont étudiées sur un chemin sur le bord du rotor en arc de cercle de centre $(x = 0; y = 0)$ de rayon 0,49 et d'angle de 0 à 359° avec 201 points, c'est-à-dire un point tous les 1,795°. Ce chemin est représenté en noir sur la figure 9.12.

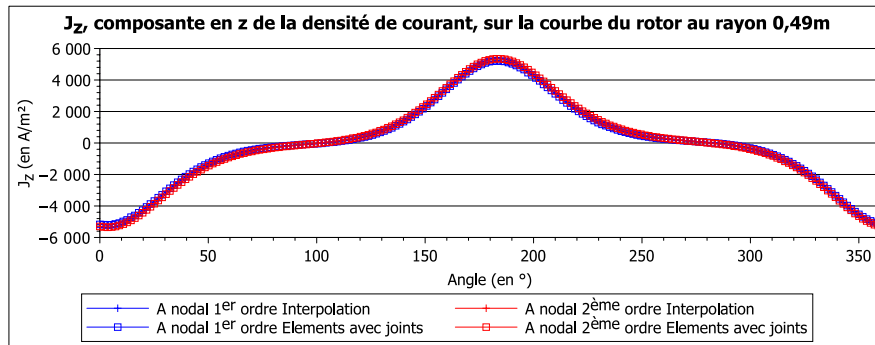
Les figures 9.13a et 9.13b représentent le module de l'induction magnétique, $|\mathbf{B}|$ en fonction de l'angle du chemin en arc de cercle pour la méthode des éléments avec joints respectivement avec des éléments nodaux et d'arête, en la comparant à la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. Sur la figure 9.13a, les résultats sont identiques pour la méthode d'interpolation et celle des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du deuxième ordre. De même, les résultats sont identiques pour la méthode d'interpolation et celle des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier ordre. Mais, les résultats avec des éléments nodaux du premier ordre sont un peu inférieurs à ceux du deuxième ordre. Pour la méthode des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{H}_{int} avec des éléments d'arête du premier ordre, les résultats de la figure 9.13b sont similaires à ceux de la méthode d'interpolation avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre, mais ils oscillent un peu au niveau des pointes à cause de l'interpolation au premier ordre.



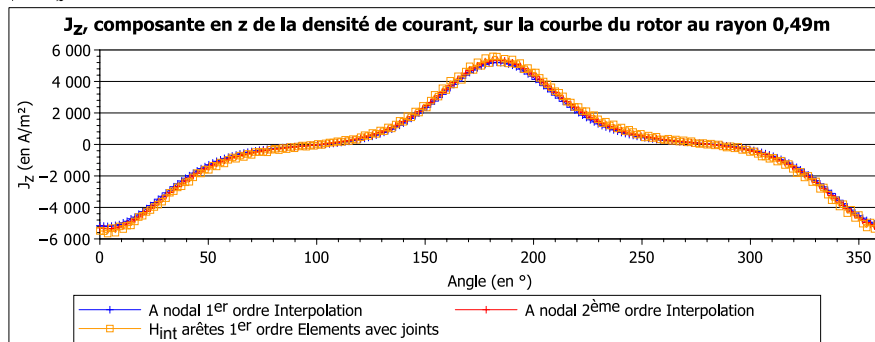
(a) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



(b) $|\mathbf{B}|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête



(c) J_{e_z} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



(d) J_{e_z} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête

FIGURE 9.13 – Module de l'induction magnétique \mathbf{B} et composante en z de la densité de courant \mathbf{J}_e sur le chemin du rotor au rayon 0,49 en fonction de l'angle pour la machine de géométrie simple

9.3. CONCLUSION

Les figures 9.13c et 9.13d représentent la composante en z de la densité de courant \mathbf{J}_e pour la méthode des éléments avec joints respectivement avec des éléments nodaux et d'arête, en la comparant à la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. Sur ces figures, les résultats de J_{e_z} en fonction du temps sont identiques pour la méthode des éléments avec joints avec les formulations en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre et en \mathbf{H}_{int} avec des éléments d'arête du premier ordre et pour la méthode d'interpolation avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre.

Dans ce paragraphe, $|\mathbf{B}|$ et J_{e_z} ont été étudié avec différentes méthodes de prise en compte du mouvement. La méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête donne de bons résultats par rapport à la méthode d'interpolation avec des éléments finis nodaux, malgré quelques oscillations pour \mathbf{B} au niveau des pointes dues aux éléments du premier ordre.

Dans le prochain paragraphe, la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête sera étudiée sur un chemin traversant les parties fixe et mobile pour vérifier que la méthode prend bien en compte le mouvement. Ce chemin sera selon x en $y = 0$.

9.2.2.4 Sur un chemin selon x en $y=0$

Sur la figure 9.14, l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J}_e sont étudiées sur un chemin traversant les parties mobile et fixe en $y = 0$ m de $x = -5$ à 5 m avec 201 points, c'est-à-dire un point tous les 0,05 m. Ce chemin est représenté en rouge sur la figure 9.12.

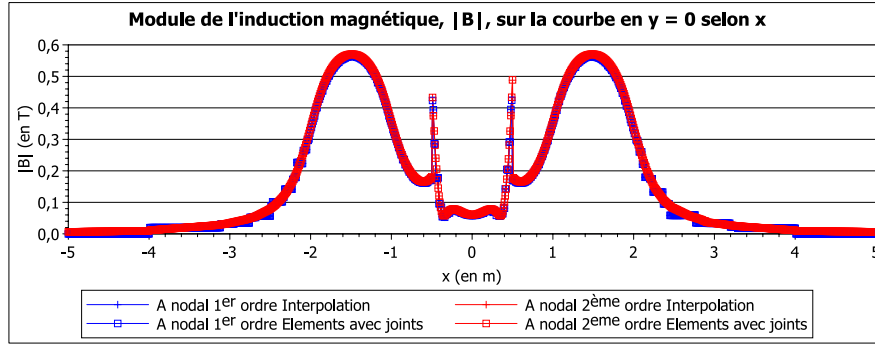
Les figures 9.14a et 9.14b représentent le module de l'induction magnétique, $|\mathbf{B}|$, en fonction de x variant de -5 à 5 m pour la méthode des éléments avec joints respectivement avec des éléments nodaux et d'arête, en la comparant à la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. Sur la figure 9.14a, les résultats sont identiques pour les méthodes d'interpolation et des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre. Pour la méthode des éléments avec joints avec la formulation en \mathbf{H}_{int} avec des éléments d'arête du premier ordre, les résultats de la figure 9.14b sont identiques à ceux de la méthode d'interpolation avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre.

Les figures 9.14c et 9.14d représentent la composante en z de la densité de courant \mathbf{J}_e pour la méthode des éléments avec joints respectivement avec des éléments nodaux et d'arête, en la comparant à la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. Sur ces figures, les résultats de J_{e_z} en fonction de x sont identiques pour la méthode des éléments avec joints avec les formulations en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre et en \mathbf{H}_{int} avec des éléments d'arête du premier ordre et pour la méthode d'interpolation avec la formulation en \mathbf{A} avec des éléments nodaux du premier et du deuxième ordre.

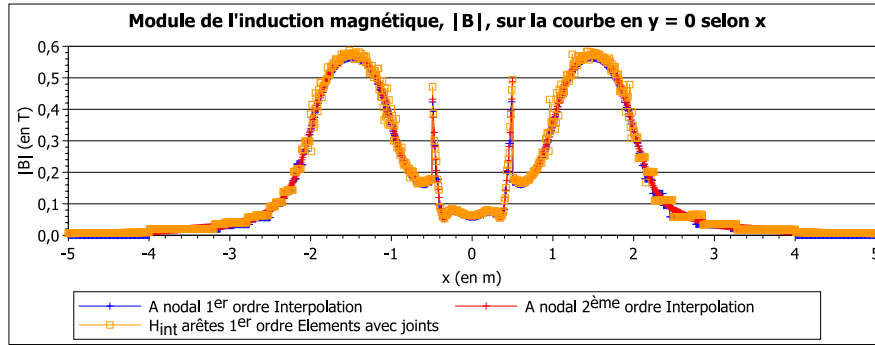
Donc la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête prend en compte le mouvement correctement, puisque les valeurs de \mathbf{B} et \mathbf{J}_e sur un chemin traversant les parties fixe et mobile sont identiques à celles de la méthode d'interpolation avec des éléments finis nodaux.

9.3 Conclusion

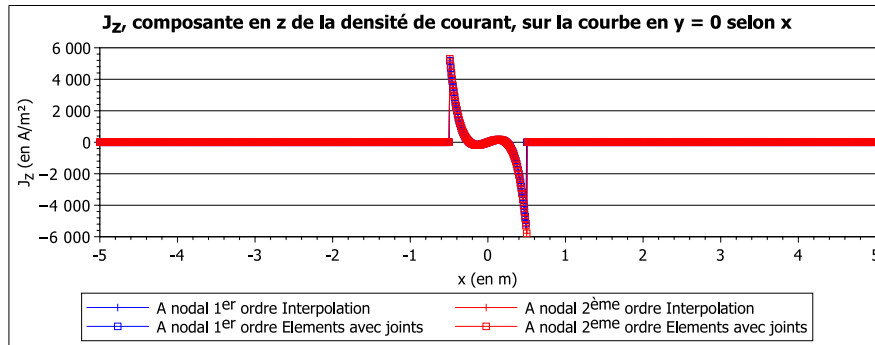
Dans cette section, la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête a été validée en 2D sur le problème 24 du T.E.A.M. Workshop et une machine de géométrie simple en la comparant avec la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux. La formulation utilisée avec des éléments nodaux est celle en \mathbf{A} et la formulation avec des



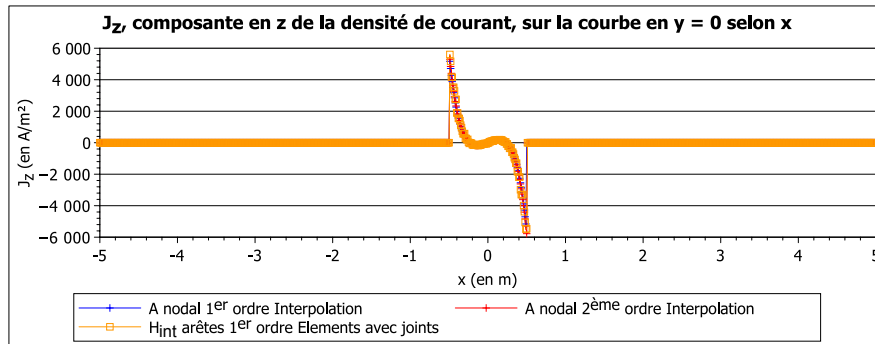
(a) $|B|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



(b) $|B|$ avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête



(c) J_{e_z} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments nodaux



(d) J_{e_z} avec la méthode des éléments avec joints pour des éléments d'arête

FIGURE 9.14 – Module de l'induction magnétique B et composante en z de la densité de courant J_e sur le chemin en $y = 0$ en fonction de x pour la machine de géométrie simple en 2D

9.3. CONCLUSION

éléments d'arête est celle en \mathbf{H}_{int} . Finalement, la méthode des éléments avec joints donne des bons résultats pour des grandeurs globales comme le couple et le flux et pour des grandeurs locales magnétique \mathbf{B} et électrique \mathbf{J}_e pour ces deux cas tests en 2D avec des éléments finis nodaux et d'arête. Cependant, les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{H}_{int} avec des éléments finis du premier ordre créent des oscillations à cause de l'interpolation du premier ordre. Mais ces oscillations n'existent plus avec des éléments finis du deuxième ordre. Cependant, les éléments finis d'arête du deuxième ordre ne sont pas développés dans le logiciel Flux[®].

Conclusion de la partie III

Dans cette dernière partie, la prise en compte du mouvement pour la formulation en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique a été étudiée.

Dans le septième chapitre, plusieurs méthodes de prise en compte du mouvement ont été étudiées. Certaines méthodes sont basées sur un entrefer volumique : le remaillage, le macro-élément, le couplage avec les intégrales de frontière et l'overlapping. D'autres méthodes sont basées sur une surface de glissement : le pas bloqué, les multiplicateurs de Lagrange, l'interpolation et les éléments avec joints. La méthode de prise en compte du mouvement pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ doit être générique, doit pouvoir être réalisée en 3D et en éléments d'arête et doit permettre d'obtenir de bons résultats sans contraintes sur le pas de temps et le maillage. Finalement, la méthode de prise en compte du mouvement choisie dans cette partie est celle des éléments avec joints, une méthode générique s'utilisant en 2D et en 3D avec des éléments nodaux et d'arête.

Dans le huitième chapitre, la méthode des éléments avec joints est détaillée, en particulier, les matrices de couplage C et D de cette méthode sont décrites en éléments nodaux et d'arête et en deux et en trois dimensions. Une attention particulière est portée sur le domaine d'intégration des matrices de couplage C et D , l'intégration de ces matrices et l'inversion de la matrice C . En 2D et en 3D, la matrice de couplage C est intégrée sur le domaine fixe. Alors qu'en 2D, la matrice de couplage D est intégrée sur l'union des domaines fixe et mobile à l'interface, et en 3D, elle est intégrée sur un troisième maillage de l'interface des domaines mobile et fixe, indépendant de ces deux maillages mais plus fin. L'intégration des matrices est réalisée par la formule de quadrature de Gauss. Enfin, l'inversion de la matrice C est réalisée avec MUMPS.

Dans le neuvième chapitre, la méthode des éléments avec joints a été validée en deux dimensions avec des éléments finis nodaux et d'arête par comparaison avec la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux sur le problème 24 du T.E.A.M. Workshop et une machine de géométrie simple. Cette méthode donne les mêmes résultats en 2D avec des éléments finis nodaux et d'arête que la méthode d'interpolation.

Finalement, la méthode des éléments avec joints prend correctement en compte le mouvement en 2D.

Conclusion générale

Les machines asynchrones doivent être modélisées en trois dimensions grâce à des outils de simulation pour évaluer efficacement les pertes par courant de Foucault. Le logiciel de simulation Flux[®] modélise les problèmes en trois dimensions par des formulations basées sur le potentiel scalaire magnétique résolues avec des éléments finis nodaux [Le Floch, 2002]. Cependant, cette formulation a besoin de coupures mathématiques artificielles lorsque le domaine n'est pas simplement connexe, i.e. lorsqu'il comporte un trou [Rodger et Eastham, 1987]–[Vérité, 1987]. Ces coupures sont souvent difficiles à mettre en œuvre par l'utilisateur [Phung, 2006].

Afin d'éviter d'introduire des coupures artificielles dans le domaine d'étude, des formulations en potentiel vecteur magnétique ont été développées en trois dimensions. Deux formulations en potentiel vecteur magnétique ont été étudiées en magnétique transitoire : la formulation en $\mathbf{A} - V$ et la formulation en $\mathbf{A}_r - V$. Le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r ont été naturellement interpolés par des éléments finis d'arête, alors que le potentiel scalaire électrique V , nécessaire dans les conducteurs massifs, a été interpolé par des éléments finis nodaux. Les bobines sont soit maillées, soit non maillées. Pour des bobines maillées, il est difficile d'utiliser la formulation en $\mathbf{A}_r - V$. Pour des bobines non maillées, les deux formulations en potentiel vecteur magnétique donnent des résultats équivalents. De plus, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est plus simple à implémenter. Donc, la formulation en $\mathbf{A} - V$ est préférée à la formulation en $\mathbf{A}_r - V$.

L'utilisation des éléments d'arête pour le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} introduit d'autres difficultés telles que l'introduction d'une condition de jauge. Cette condition de jauge, qui est représentée dans cette thèse par un arbre d'arêtes, est nécessaire avec les solveurs directs et avec les solveurs itératifs lorsque la formulation n'est pas compatible [Ren, 1996]. Lorsque la formulation est compatible, un solveur itératif converge en un temps plus court qu'un solveur direct sur des petits problèmes, mais en un temps équivalent sur des gros problèmes. Mais lorsque la formulation n'est pas compatible, il vaut mieux utiliser un solveur direct, car les solveurs itératifs sont fortement ralentis par un arbre d'arêtes.

Les termes sources des formulations en potentiel vecteur magnétique ont été étudiés pour les rendre compatibles, afin de ne pas utiliser de jauge par arbre pour les solveurs itératifs. Ces termes sources dépendent des bobines maillées et des bobines non maillées. Les sources des bobines maillées sont calculées seulement à partir de la densité de courant source \mathbf{J}_s , alors que les sources des bobines non maillées sont calculées à partir du champ magnétique source \mathbf{H}_s et du potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s déduit de la loi de Biot et Savart [Urankar, 1980]–[Urankar, 1982a]–[Urankar, 1982b]. Pour ne pas recalculer ces sources à chaque fois qu'elles sont utilisées, elles sont projetées puis stockées sur le maillage. Pour des bobines maillées, la source \mathbf{J}_s est projetée sur les éléments finis d'arête avec la semi-norme de l'espace des éléments d'arête $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et stockée dans le champ magnétique source projeté \mathbf{H}_j . Pour des bobines non maillées, la source \mathbf{H}_s est projetée sur les éléments d'arête avec la semi-norme de l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et stockée dans le potentiel vecteur magnétique source projeté \mathbf{A}_j .

[Ferrouillat *et al.*, 2015]. L'espace des éléments d'arête $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ est utilisé pour les projections parce que les sources sont stockées sur les éléments d'arête et qu'une projection avec l'espace des éléments nodaux $\mathbf{L}^2(\Omega)$ engendre des erreurs sur la variable d'arête. La semi-norme est préférée à la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, parce que seul le rotationnel des sources projetées \mathbf{A}_j et \mathbf{H}_j est utilisé et les temps de calcul sont plus faibles. Ces termes sources rendent la formulation en $\mathbf{A} - V$ compatible.

De plus lorsqu'une partie du domaine d'étude est en mouvement, la continuité des grandeurs doit être assurée à l'interface des parties du domaine en mouvement et fixe. Pour ne pas avoir besoin d'assurer la continuité des termes sources à l'interface, ces derniers sont calculés sur un domaine réduit, la partie du domaine en mouvement ou la partie fixe suivant laquelle contient des bobines. Sur un domaine réduit, le terme source \mathbf{H}_j de la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines maillées est calculé seulement sur ce domaine et ces circulations sont annulées sur le bord du domaine. En revanche pour des bobines non maillées, il est plus difficile d'étudier le terme source \mathbf{A}_j sur un domaine réduit. Avec la solution trouvée, la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec \mathbf{A}_j calculé sur un domaine réduit n'est plus compatible. Mais pour des gros problèmes, il est possible de résoudre la formulation en $\mathbf{A} - V$ sans condition de jauge même si elle n'est pas compatible. Donc, les termes sources \mathbf{H}_j et \mathbf{A}_j de la formulation en $\mathbf{A} - V$ peuvent être calculés sur un domaine en mouvement.

Le mouvement des machines asynchrones s'effectue dans le rotor. L'entrefer est l'interface entre le rotor en mouvement et le stator fixe. Avec les formulations en potentiel scalaire magnétique, le potentiel scalaire magnétique est calculé dans l'entrefer. Donc la prise en compte du mouvement ne nécessite qu'une interpolation nodale relativement simple à mettre en œuvre [Perrin-Bit, 1994]. Avec les éléments d'arête pour le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , l'interpolation est plus délicate. Alors plusieurs méthodes de prise en compte du mouvement ont été étudiées : le remaillage, le macro-élément, le couplage avec les intégrales de frontière, l'overlapping, le pas bloqué, les multiplicateurs de Lagrange, l'interpolation et les éléments avec joints. Les critères de choix de la méthode sont qu'elle soit générique en deux et en trois dimensions et pour des éléments finis nodaux et d'arête et qu'elle permette d'obtenir des bons résultats sans contrainte sur le pas de temps et le maillage. Ces critères ont permis de choisir la méthode des éléments avec joints [Rapetti, 2000]. Les matrices de couplage C et D de la méthode des éléments avec joints sont intégrées à l'aide de la formule de quadrature de Gauss. La matrice C est calculée une seule fois et son domaine d'intégration est le domaine fixe en deux et en trois dimensions. En deux dimensions, le domaine d'intégration de la matrice D est l'union des maillages des domaines fixe et mobile. En trois dimensions, c'est un troisième maillage indépendant des maillages des domaines fixe et mobile et plus fin. En deux dimensions, la méthode des éléments avec joints avec des éléments finis nodaux et d'arête donne les mêmes résultats que la méthode d'interpolation avec des éléments nodaux.

Une première perspective de cette thèse est de valider la méthode des éléments avec joints en trois dimensions pour des éléments nodaux avec la formulation en potentiel scalaire magnétique et pour des éléments d'arête avec la formulation en $\mathbf{A} - V$, en la comparant avec la méthode d'interpolation avec des éléments finis nodaux en trois dimensions.

Une deuxième perspective est de développer d'autres méthodes de prise en compte du mouvement en trois dimensions pour des éléments finis d'arête, comme par exemple l'overlapping, et de les comparer entre elles afin de définir la meilleure méthode en éléments d'arête.

Une troisième perspective est de développer des éléments finis d'arête du deuxième ordre dans le logiciel Flux[®]. En effet, tous les calculs effectués en éléments nodaux dans cette thèse sont généralement faits au deuxième ordre, alors que ceux en éléments d'arête sont faits au premier ordre. Dans le dernier chapitre, la différence entre le premier et le deuxième ordre a pu être constaté. Le deuxième ordre en éléments d'arête permettrait d'obtenir de meilleurs

résultats pour la formulation en $\mathbf{A} - V$.

Finalement, une machine asynchrone peut maintenant être étudiée avec la formulation en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire magnétique sans coupures artificielles qui sont parfois difficiles à introduire. De plus pour modéliser correctement une machine asynchrone, il est nécessaire de prendre en compte le mouvement de la machine et les équations de circuit électrique. La prise en compte du mouvement a été réalisée par la méthode des éléments avec joints. Une quatrième perspective de cette thèse est donc de coupler la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec les équations de circuit électrique.

Avec toutes ces perspectives, il sera alors possible de simuler des machines asynchrones avec la formulation en $\mathbf{A} - V$ avec des bobines maillées ou non avec des éléments finis d'arêtes du premier ou du deuxième ordre et de coupler cette formulation aux équations de circuit tout en prenant en compte le mouvement par la méthode des éléments avec joints.

ANNEXES

Annexe A

Notions mathématiques appliquées au génie électrique

Sommaire

A.1	Topologie	230
A.1.1	Connexité	230
A.1.2	Simple connexité	230
A.1.3	Ensemble ouvert ou fermé	231
A.2	Opérateurs différentiels	232
A.2.1	Compositions d'opérateurs différentiels	232
A.2.1.1	Le rotationnel d'un gradient est nul	232
A.2.1.1.1	Formes différentielles de degré 1	232
A.2.1.1.2	Lemme de Poincaré	232
A.2.1.1.3	Démonstration de $\text{rot}(\text{grad}) = \mathbf{0}$	233
A.2.1.2	La divergence d'un rotationnel est nulle	233
A.2.1.2.1	Théorème de Schwarz	233
A.2.1.2.2	Démonstration de $\text{div}(\text{rot}) = 0$	234
A.2.2	Compositions des champs dans les opérateurs différentiels	234
A.2.3	Théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski	235
A.2.3.1	Théorème de Stokes	235
A.2.3.2	Théorème d'Ostrogradski (ou de la divergence)	235
A.2.4	Formules de Green	235
A.2.4.1	Démonstration de la formule de Green sur la divergence et le gradient	236
A.2.4.2	Démonstration de la formule de Green sur le rotationnel	236
A.2.5	Conditions aux limites déduites des espaces fonctionnels des opérateurs différentiels	237
A.2.5.1	Démonstration pour les espaces E_v^0 et \mathbf{E}_v^1	237
A.2.5.2	Démonstration pour les espaces \mathbf{E}_v^1 et \mathbf{E}_v^2	237
A.2.5.3	Démonstration pour l'espace \mathbf{E}_v^2	237
A.3	Loi de Biot et Savart	239

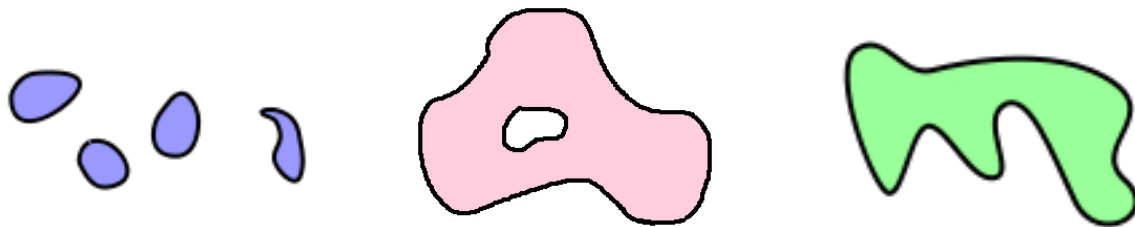
Dans cette annexe, des définitions et des théorèmes du domaine des mathématiques seront donnés pour comprendre la résolution des modèles électromagnétiques [Dixmier, 1981].

A.1 Topologie

A.1.1 Connexité

La *connexité* est une notion de topologie qui formalise le concept d'un espace d'un seul tenant. Un espace est dit *connexe* s'il est fait d'un seul morceau. Cependant lorsque l'espace n'est pas connexe, chacun des morceaux de l'espace étudié est une *composante connexe*.

Par exemple sur la figure A.1, trois espaces sont représentés. L'espace de la figure A.1a n'est pas connexe, puisqu'il est divisé en quatre morceaux. Ces quatre morceaux, pris chacun à part, sont connexes. Cet espace est alors constitué de quatre composantes connexes. Les espaces des figures A.1b et A.1c sont connexes, puisqu'ils sont d'un seul tenant.



(a) Espace non connexe avec 4 composantes connexes (b) Espace (multiplement) connexe (c) Espace simplement connexe

FIGURE A.1 – Connexité d'un ensemble

La notion de connexité peut être affinée avec celle de simple connexité, expliquée dans la prochaine sous-section.

A.1.2 Simple connexité

Un espace *simplement connexe* est un espace connexe, c'est-à-dire un espace d'un seul tenant qui ne possède pas de trou. Il est aussi défini par le formalisme suivant : tout lacet tracé dans un espace simplement connexe doit pouvoir être réduit continûment à un point. Alors, tout espace qui n'est pas simplement connexe est appelé un espace *multiplement connexe*. Par définition, tout espace simplement connexe est aussi un espace connexe.

Par exemple, l'espace de la figure A.1a n'est ni connexe ni simplement connexe, mais il est multiplement connexe et possède quatre composantes connexes. La figure A.1b représente un espace connexe, mais cet espace n'est pas simplement connexe puisqu'il possède un trou, il est donc multiplement connexe. Enfin, l'espace de la figure A.1c est simplement connexe, cet espace est donc aussi connexe.

Dans ces deux sous-sections sur la topologie, les notions de connexité et simple connexité ont été étudiées. Dans la prochaine sous-section, une autre notion de topologie sera étudiée, celle des ensembles ouverts ou fermés.

A.1.3 Ensemble ouvert ou fermé

Soit un espace Ω . En topologie, un *ensemble ouvert*, aussi appelé une *partie ouverte*, ou un *ouvert*, est un sous-ensemble de l'espace Ω qui ne contient aucun point de sa frontière. Alors qu'un *ensemble fermé*, aussi appelé une *partie fermée*, ou un *fermé*, est un sous-ensemble de l'espace Ω qui contient les points de sa frontière. Un fermé est donc un ouvert avec son bord.

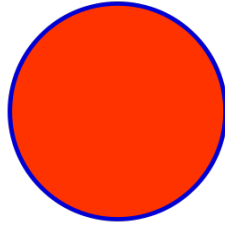


FIGURE A.2 – Ouvert (en rouge) et fermé (en bleu et rouge)

Par exemple sur la figure A.2, les points (x, y) qui satisfont à l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ sont en bleu et ceux qui satisfont à la relation $x^2 + y^2 < r^2$ sont en rouge. Les points rouges forment un ensemble ouvert. L'union des points bleus et rouges forment un ensemble fermé.

Dans cette section, des notions de topologie, comme la connexité et les ensembles ouvert et fermé, ont été étudiées. Dans la prochaine section, ce ne seront plus les espaces qui seront étudiés, mais les opérateurs différentiels **grad**, **rot** et **div**.

A.2 Opérateurs différentiels

Toutes les démonstrations de cette section seront faites à l'aide du système de coordonnées cartésiennes. Elles peuvent aussi être faites avec les coordonnées cylindriques ou polaires.

A.2.1 Compositions d'opérateurs différentiels

Dans cette sous-section, les compositions d'opérateurs différentiels seront étudiées. Il sera démontré que le rotationnel d'un gradient et la divergence d'un rotationnel sont toujours nuls tels que :

$$\forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = \mathbf{0} \text{ dans un domaine } \Omega \text{ simplement connexe,} \quad (\text{A.1})$$

$$\forall \mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{a}) = 0. \quad (\text{A.2})$$

A.2.1.1 Le rotationnel d'un gradient est nul

A.2.1.1.1 Formes différentielles de degré 1

Avant de démontrer que le rotationnel d'un gradient est nul, les *formes différentielles de degré 1*, appelées aussi *1-formes différentielles*, seront définies.

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) les coordonnées de l'espace \mathbb{R}^n . Les *formes linéaires sur \mathbb{R}^n* s'expriment comme des combinaisons à coefficients réels des formes linéaires dx_1, \dots, dx_n . Une *1-forme différentielle* est une application, qui à un point de l'espace, fait correspondre une forme linéaire. Une forme différentielle de degré 1, ω , s'exprime alors comme une combinaison des dx_1, \dots, dx_n , dont les coefficients sont des fonctions C^∞ du point de base a , telle que :

$$\omega_a = \omega_1(a) dx_1 + \dots + \omega_n(a) dx_n.$$

Une *forme différentielle de degré 1* ω est *exacte* lorsqu'elle est la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} \omega_a &= d_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i, \\ \omega_i(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i, 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

A.2.1.1.2 Lemme de Poincaré

Les 1-formes différentielles, utilisées par le lemme de Poincaré, ont été définies. Dans ce paragraphe, le lemme de Poincaré sera donné pour démontrer que le rotationnel d'un gradient est nul.

Lemme de Poincaré. Soit $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \dots + \omega_n dx_n$ une 1-forme différentielle, de classe C^1 sur un ouvert simplement connexe Ω .

ω est exacte si et seulement si ω est fermée, c'est-à-dire si $\forall i, j < n, \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$.

A.2. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

A.2.1.1.3 Démonstration de $\text{rot}(\text{grad}) = 0$

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de l'espace \mathbb{R}^3 et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Le gradient de la fonction f , nommé \mathbf{g} , est tel que :

$$\mathbf{g} = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

La forme différentielle $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3$ est introduite telle que :

$$\begin{aligned} \omega &= \text{grad } f \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = df, \\ \Rightarrow \quad \omega_i &= g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Donc, ω est une forme différentielle exacte. De plus, le domaine d'étude Ω est un ouvert, défini dans l'annexe A.1.3. En considérant Ω comme un domaine simplement connexe, défini dans l'annexe A.1.2, et d'après le lemme de Poincaré, défini dans l'annexe A.2.1.1.2, ω est une forme différentielle fermée telle que :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, 1 \leq i, j \leq n.$$

Or le rotationnel du gradient de f est tel que :

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot } \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Donc en sachant que ω est une forme différentielle fermée, le rotationnel d'un gradient est toujours nul dans un domaine Ω simplement connexe, $\text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}, \forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

A.2.1.2 La divergence d'un rotationnel est nulle

A.2.1.2.1 Théorème de Schwarz

Pour démontrer que la divergence d'un rotationnel est nulle, le théorème de Schwarz sera donné.

Théorème de Schwarz. Soient (x_1, x_2, \dots, x_n) les coordonnées de l'espace \mathbb{R}^n et une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Si les dérivées partielles de f existent à l'ordre 2 et sont continues, alors le résultat d'une dérivation à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux 2 variables considérées, c'est-à-dire : $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j \leq n.$

A.2.1.2.2 Démonstration de $\text{div}(\text{rot}) = 0$

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de l'espace \mathbb{R}^3 et

$$\begin{aligned} \mathbf{a} : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow \begin{pmatrix} a_{x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ a_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ a_{x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le rotationnel de la fonction \mathbf{a} est tel que :

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{x_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{x_2}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{x_1}}{\partial x_3} - \frac{\partial a_{x_3}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_{x_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{x_1}}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Or la divergence du rotationnel d' \mathbf{a} est telle que :

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{a}) = \frac{\partial^2 a_{x_3}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 a_{x_2}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 a_{x_1}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 a_{x_3}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 a_{x_2}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 a_{x_1}}{\partial x_3 \partial x_2}.$$

$a_{x_1}, a_{x_2}, a_{x_3} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞ définies sur l'ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (voir l'annexe A.1.3). Le théorème de Schwarz, défini dans l'annexe A.2.1.2.1, permet d'en déduire que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial a_{x_k}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial a_{x_k}}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

Finalement avec le théorème de Schwarz, la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, $\text{div}(\text{rot } \mathbf{a}) = 0, \forall \mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dans cette sous-section, les compositions d'opérateurs ont été étudiées. En particulier la composition du gradient par le rotationnel a été démontrée nulle dans un domaine simplement connexe grâce au lemme de Poincaré et la composition du rotationnel par la divergence a été démontrée nulle aussi grâce au théorème de Schwarz. Dans la prochaine sous-section, il sera étudié les compositions des champs scalaires et vectoriels dans les opérateurs différentiels : le gradient du produit scalaire de deux vecteurs, le rotationnel et la divergence d'un vecteur multiplié par un scalaire et la divergence du produit vectoriel de deux vecteurs.

A.2.2 Compositions des champs dans les opérateurs différentiels

Les compositions des champs scalaires et vectoriels dans les opérateurs différentiels sont telles que :

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \text{grad}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \text{grad}) \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{rot}(f \mathbf{a}) = \text{grad } f \times \mathbf{a} + f \text{rot } \mathbf{a}, \quad \forall f \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\text{div } \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\text{div } \mathbf{a}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \text{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \text{grad}) \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{div}(f \mathbf{a}) = \text{grad } f \cdot \mathbf{a} + f \text{div } \mathbf{a}, \quad \forall f \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.7})$$

A.2. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Ces égalités (A.3)–(A.7) peuvent être démontrées facilement en décomposant les vecteurs et les opérateurs dans le système de coordonnées choisi (cartésiennes, cylindriques ou polaires).

Dans cette sous-section, il a été donné la composition d'un scalaire et d'un vecteur par le rotationnel et la divergence, la composition du produit scalaire de deux vecteurs par le gradient et la composition du produit vectoriel de deux vecteurs par la divergence. Dans la prochaine sous-section, deux théorèmes de l'analyse vectorielle seront étudiés : le théorème de Stokes et le théorème d'Ostrogradski.

A.2.3 Théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski

Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire.

A.2.3.1 Théorème de Stokes

Soient S une surface ouverte délimitée par un contour fermé C et $d\mathbf{l}$ l'élément différentiel de déplacement le long de la courbe C .

D'après le théorème de Stokes, la circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour tel que :

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{A.8})$$

A.2.3.2 Théorème d'Ostrogradski (ou de la divergence)

Soient une surface fermée S délimitant un volume V et l'élément de surface $d\mathbf{S}$, orienté de l'intérieur vers l'extérieur du volume V .

D'après le théorème d'Ostrogradski, le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de sa divergence étendue au volume intérieur de cette surface tel que :

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{a} dV. \quad (\text{A.9})$$

Dans cette sous-section, des théorèmes d'analyse vectorielle ont été détaillés : le théorème de Stokes tel que l'intégration du produit scalaire entre le vecteur normal et le rotationnel d'un vecteur est égale à la circulation de ce vecteur et le théorème d'Ostrogradski, ou de la divergence, tel que l'intégration de la divergence d'un vecteur est égale au flux de ce vecteur. Ces deux dernières sous-section, sur la composition des champs dans les opérateurs et sur les théorèmes d'analyse vectorielle, permettront de démontrer les formules de Green dans la prochaine sous-sections.

A.2.4 Formules de Green

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine d'étude et Γ sa frontière. Les *formules de Green* sont telles que :

$$(\text{div } \mathbf{w}, v)_\Omega + (\mathbf{w}, \text{grad } v)_\Omega = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}, v \rangle_\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \quad (\text{A.10a})$$

$$(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{x})_\Omega - (\mathbf{w}, \text{rot } \mathbf{x})_\Omega = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle_\Gamma, \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (\text{A.10b})$$

Ces égalités (A.10) seront démontrées dans la suite.

A.2.4.1 Démonstration de la formule de Green sur la divergence et le gradient

Soient $v \in H^1(\Omega)$ et $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. La notation (2.3), donnée dans le paragraphe 2.1.1.1, permet d'écrire que :

$$(\operatorname{div} \mathbf{w}, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{w} d\Omega.$$

Cette égalité devient avec l'équation (A.6), donnée dans l'annexe A.2.2 :

$$(\operatorname{div} \mathbf{w}, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{grad} v \cdot \mathbf{w} d\Omega. \quad (\text{A.11})$$

D'après le théorème d'Ostrogradski (A.9) de l'annexe A.2.3.2 et la notation (2.4) du paragraphe 2.1.1.1, le terme $\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \mathbf{w}) d\Omega$ de l'équation (A.11) devient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Gamma} (v \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \langle v, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma}.$$

Alors avec la notation (2.3), donnée dans le paragraphe 2.1.1.1, l'équation (A.11) est identique à la formule de Green (A.10a) :

$$(\operatorname{div} \mathbf{w}, v)_{\Omega} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}, v \rangle_{\Gamma} - (\mathbf{w}, \mathbf{grad} v)_{\Omega}.$$

A.2.4.2 Démonstration de la formule de Green sur le rotationnel

Soient $\mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. La notation (2.5), donnée dans le paragraphe 2.1.1.1, permet d'écrire que :

$$(\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{x})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w} d\Omega.$$

Cette égalité devient avec l'équation (A.4), donnée dans l'annexe A.2.2 :

$$(\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{x})_{\Omega} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{x} d\Omega. \quad (\text{A.12})$$

D'après le théorème d'Ostrogradski (A.9) de l'annexe A.2.3.2 et la notation (2.6) du paragraphe 2.1.1.1, le terme $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{x}) d\Omega$ de l'équation (A.12) devient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{x} d\Gamma = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle_{\Gamma}.$$

Alors avec la notation (2.5), donnée dans le paragraphe 2.1.1.1, l'équation (A.12) est identique à la formule de Green (A.10b) :

$$(\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{x})_{\Omega} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle_{\Gamma} + (\mathbf{w}, \mathbf{rot} \mathbf{x})_{\Omega}.$$

Dans cette sous-section, les formules de Green, liant les intégrales volumiques et surfaciques des différents opérateurs différentiels, ont été détaillées. Ces formules ont été démontrées grâce aux théorèmes d'analyse vectorielle et aux compositions des champs dans les opérateurs différentiels. Ces compositions, définies dans la sous-section A.2.2, permettront aussi de démontrer, dans la prochaine sous-section, les implications entre des conditions aux limites déduites des espaces fonctionnels des opérateurs différentiels.

A.2.5 Conditions aux limites déduites des espaces fonctionnels des opérateurs différentiels

Soient $u \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire à Γ , le bord du domaine Ω . Il existe des liens entre les produits scalaires et vectoriels des opérateurs différentiels tels que :

$$u|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{grad} \ u|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{w}|_{\Gamma} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \ \mathbf{w}|_{\Gamma} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \ \mathbf{w}|_{\Gamma} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}|_{\Gamma} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Ces implications (A.13)–(A.15) seront démontrées dans la suite.

A.2.5.1 Démonstration pour les espaces E_v^0 et \mathbf{E}_v^1

Soit u un réel nul, la condition à la limite de l'espace E_v^0 (2.18). Alors, le gradient de u , $\mathbf{grad} \ u$, est nul, car u ne varie pas dans le domaine \mathbb{R} . Donc, l'égalité $\mathbf{n} \times \mathbf{grad} \ u = \mathbf{0}$ est vérifiée, ainsi que l'implication (A.13). Finalement, d'après l'implication entre les conditions aux limites (A.13), l'inclusion entre les espaces, telle que $\mathbf{grad} \ E_v^0 \subset \mathbf{E}_v^1$ (2.23), est vérifiée.

A.2.5.2 Démonstration pour les espaces \mathbf{E}_v^1 et \mathbf{E}_v^2

Soient $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire tels que $\mathbf{n} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$, la condition à la limite de l'espace \mathbf{E}_v^1 (2.19). Le but est de vérifier l'égalité $\mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \ \mathbf{w} = 0$. L'équation (A.7), définie dans l'annexe A.2.2, permet de déduire que :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \ \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot} \ \mathbf{n} - \text{div}(\mathbf{n} \times \mathbf{w}).$$

Or, \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire. Alors, le rotationnel de \mathbf{n} est nul, $\mathbf{rot} \ \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Donc, si l'égalité $\mathbf{n} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ est vérifiée, alors $\mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \ \mathbf{w} = 0$ est aussi vérifié, ceci démontre l'implication (A.14) et l'inclusion entre les espaces \mathbf{E}_v^1 et \mathbf{E}_v^2 , $\mathbf{rot} \ \mathbf{E}_v^1 \subset \mathbf{E}_v^2$ (2.24).

A.2.5.3 Démonstration pour l'espace \mathbf{E}_v^2

Soient $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire tels que $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \ \mathbf{w} = \mathbf{0}$. L'équation (A.3), définie dans l'annexe A.2.2, permet de déduire que :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \ \mathbf{w} = \mathbf{grad}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} \times \mathbf{rot} \ \mathbf{n} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.16})$$

Or, \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire. Alors, le rotationnel de \mathbf{n} est nul, $\mathbf{rot} \ \mathbf{n} = \mathbf{0}$. De plus, la décomposition du terme $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{n}$ de l'équation (A.16), avec les coordonnées cartésiennes, est telle que :

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{n} = \begin{pmatrix} w_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial n_1}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \\ w_1 \frac{\partial n_2}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial n_2}{\partial x_3} \\ w_1 \frac{\partial n_3}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial n_3}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Finalement, l'équation (A.16) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{w} &= \mathbf{grad} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned}$$

Donc, l'implication (A.15) a été démontrée.

Dans cette section, les opérateurs différentiels ont été étudiés en détail. Tout d'abord, il a été démontré que la divergence d'un rotationnel est nulle et que le rotationnel d'un gradient est nul dans un domaine simplement connexe. Ensuite, des formules, sur les opérateurs différentiels appliqués à des champs scalaires et vectoriels, ont été données. Puis, les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski ont été détaillés. Ensuite, les formules de Green ont été données, puis démontrées. Enfin, des implications entre des produits scalaires et vectoriels des opérateurs différentiels avec le vecteur normal ont été étudiées.

Dans la prochaine section, la loi de Biot et Savart, permettant de calculer les termes sources, sera détaillée.

A.3 Loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart est la solution intégrale du problème de la magnétostatique dans le vide. Elle permet de définir le potentiel vecteur magnétique source \mathbf{A}_s et le champ magnétique source \mathbf{H}_s tels que :

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{J}_s}{r} d\mathbf{y}, \quad (\text{A.17a})$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{y}, \quad (\text{A.17b})$$

avec

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ un point du domaine Ω ,
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ un point du domaine de la bobine Ω_c ,
- \mathbf{J}_s la densité de courant de la bobine,
- \mathbf{r} le vecteur position du point d'évaluation \mathbf{x} par rapport au point d'intégration \mathbf{y} ,
- r la distance entre le point d'évaluation \mathbf{x} et le point d'intégration \mathbf{y} .

Annexe B

θ -schémas et méthode d'Euler

Sommaire

B.1	θ -schémas et méthode d'Euler	242
B.1.1	Problème à résoudre	242
B.1.2	θ -schémas	242
B.2	Étude des θ -schémas	244
B.2.1	Stabilité (faible sensibilité aux erreurs)	244
B.2.2	Consistance (annulation de la somme des erreurs avec Δt)	244
B.2.3	Convergence	245
B.2.4	Ordre de convergence	245
B.2.5	Stabilité numérique	245

La *méthode d'Euler* est une méthode itérative permettant de résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. Cette méthode permet donc d'approcher des dérivées.

B.1 θ -schémas et méthode d'Euler

B.1.1 Problème à résoudre

Soit le temps $t \in [0, T]$. Soit une fonction $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le problème à résoudre par la méthode d'Euler consiste à calculer la solution x de l'équation différentielle du premier ordre telle que :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{B.1a})$$

$$x(t=0) = x_{(0)}, \quad \text{Condition initiale}, \quad (\text{B.1b})$$

où f et $x_{(0)}$ sont donnés. Ce problème est appelé *problème de Cauchy*. Si la fonction f est continue lipschitzienne uniformément en t , alors le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution x au problème (B.1).

En général, il est difficile de trouver une expression simple de la solution x . La méthode d'Euler permet de trouver une solution approchée de x . Finalement, le problème à résoudre par la méthode d'Euler (B.1) consiste à calculer une solution approchée \tilde{x} de x tel que :

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{B.2a})$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_{(0)}, \quad \text{Condition initiale}, \quad (\text{B.2b})$$

où \tilde{f} et $\tilde{x}_{(0)}$ approchent la fonction f et la condition initiale $x_{(0)}$.

Pour résoudre le problème (B.2) avec la méthode d'Euler, l'intervalle $[0, T]$ est divisé en n sous-intervalles $[t_{(j)}, t_{(j+1)}]$, avec $0 \leq j \leq n-1$ et $t_{(j)} < t_{(j+1)}$, tel que :

$$[0, T] = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} [t_{(j)}, t_{(j+1)}]. \quad (\text{B.3})$$

Soit $\Delta t_{(j)} = t_{(j+1)} - t_{(j)}$ le pas de temps à l'itération j . A chaque $t_{(j)}$, une solution approchée de $x(t_{(j)})$ est calculée, elle est notée $\tilde{x}(t_{(j)})$ ou $\tilde{x}_{(j)}$.

Dans la prochaine sous-section, les θ -schémas, dont la méthode d'Euler, seront étudiés pour résoudre le problème de Cauchy (B.1), décrit dans cette sous-section.

B.1.2 θ -schémas

A l'itération $j+1$, le θ -schéma consiste à calculer la solution approchée $\tilde{x}_{(j+1)}$ au temps $t_{(j+1)}$ à partir de $\tilde{x}_{(j)}$, calculé au temps $t_{(j)}$, tel que :

$$\tilde{x}_{(j+1)} = \tilde{x}_{(j)} + \Delta t_{(j)} [\theta f(t_{(j+1)}, \tilde{x}_{(j+1)}) + (1 - \theta) f(t_{(j)}, \tilde{x}_{(j)})], \quad (\text{B.4})$$

où θ est un paramètre compris entre 0 et 1. Les valeurs de θ définissent différents schémas. Les schémas les plus utilisés sont donnés dans le tableau B.1. Dans ce tableau, il existe deux méthodes d'Euler :

B.1. θ -SCHÉMAS ET MÉTHODE D'EULER

θ	Schéma
0	Euler explicite
0,5	Crank-Nicholson
2/3	Galerkin
0,878	Liniger
1	Euler implicite

TABLEAU B.1 – Schéma d'intégration suivant θ

- la méthode d'Euler explicite, avec $\theta = 0$ et $\tilde{x}_{(j+1)} = \tilde{x}_{(j)} + \Delta t_{(j)} f(t_{(j)}, \tilde{x}_{(j)})$,
- la méthode d'Euler implicite, avec $\theta = 1$ et $\tilde{x}_{(j+1)} = \tilde{x}_{(j)} + \Delta t_{(j)} f(t_{(j+1)}, \tilde{x}_{(j+1)})$.

D'après la définition du θ -schéma (B.4), la solution x du problème de Cauchy (B.1) est approchée au temps $t_{(j+1)}$ telle que :

$$x = \theta \tilde{x}_{(j+1)} + (1 - \theta) \tilde{x}_{(j)}. \quad (\text{B.5})$$

Pour la méthode d'Euler explicite, la solution x est approchée à l'itération j par $\tilde{x}_{(j)}$. Alors que pour la méthode d'Euler implicite, x est approchée par $\tilde{x}_{(j+1)}$.

Alors, la dérivée temporelle approchée de x est telle que :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\tilde{x}_{(j+1)} - \tilde{x}_{(j)}}{\Delta t_{(j)}}. \quad (\text{B.6})$$

La dérivée temporelle ne dépend pas de θ .

Dans cette section, les θ -schémas ont été détaillés. Dans la prochaine section, la stabilité, la consistance et la convergence des θ -schémas seront étudiées.

B.2 Étude des θ -schémas

Dans cette section, les θ -schémas seront étudiés afin de déterminer pour quelle valeur de θ , une solution correcte est obtenue.

B.2.1 Stabilité (faible sensibilité aux erreurs)

Le θ -schéma (B.4) est *stable* s'il n'est pas trop sensible aux erreurs (par exemple, les erreurs d'arrondi), c'est-à-dire s'il existe une constante $M > 0$ indépendante du pas de temps $\Delta t_{(j)}$ telle que si deux suites quelconques $(\tilde{x}_{(j)})_{0 \leq j \leq n}$ et $(\tilde{y}_{(j)})_{0 \leq j \leq n}$ vérifient

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{(j+1)} &= \tilde{x}_{(j)} + \Delta t_{(j)} \left[\theta f(t_{(j+1)}, \tilde{x}_{(j+1)}) + (1 - \theta) f(t_{(j)}, \tilde{x}_{(j)}) \right] , \\ \tilde{y}_{(j+1)} &= \tilde{y}_{(j)} + \Delta t_{(j)} \left[\theta f(t_{(j+1)}, \tilde{y}_{(j+1)}) + (1 - \theta) f(t_{(j)}, \tilde{y}_{(j)}) \right] + \epsilon_{(j)},\end{aligned}$$

où $(\epsilon_{(j)})_{0 \leq j \leq n}$ est une suite donnée quelconque, alors le maximum de la différence est majoré, à une constante multiplicative près, par l'erreur initiale et la somme des erreurs accumulées au cours du temps tel que :

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{x}_{(j)} - \tilde{y}_{(j)}| \leq M \left(|\tilde{x}_{(0)} - \tilde{y}_{(0)}| + \sum_{k=0}^{n-1} |\epsilon_{(k)}| \right). \quad (\text{B.7})$$

Avec la définition (B.7) de la stabilité, tous les θ -schémas sont stables.

B.2.2 Consistance (annulation de la somme des erreurs avec Δt)

Avant de définir la consistance, l'*erreur locale* à l'instant $t_{(j)}$, $\epsilon_{(j)}$, est définie telle que :

$$\epsilon_{(j)} = [x(t_{(j+1)}) - \tilde{x}_{(j+1)}] - [x(t_{(j)}) - \tilde{x}_{(j)}]. \quad (\text{B.8})$$

Dans le cas des θ -schémas (B.4), l'erreur locale à l'instant $t_{(j)}$, $\epsilon_{(j)}$ (B.8), est telle que :

$$\epsilon_{(j)} = x(t_{(j+1)}) - x(t_{(j)}) - \Delta t_{(j)} \left[\theta f(t_{(j+1)}, \tilde{x}_{(j+1)}) + (1 - \theta) f(t_{(j)}, \tilde{x}_{(j)}) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Soit $\Delta t = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_{(j)}$. Un schéma est *consistant* si et seulement si la somme des erreurs locales en valeur absolue s'annule avec Δt telle que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |\epsilon_{(j)}| \right) = 0. \quad (\text{B.10})$$

Alors le θ -schéma (B.4) est consistant si et seulement si l'équation (B.10) avec $\epsilon_{(j)}$ défini par l'équation (B.9) est respectée telle que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{(j+1)}) - x(t_{(j)}) - \Delta t_{(j)} \left[\theta f(t_{(j+1)}, \tilde{x}_{(j+1)}) + (1 - \theta) f(t_{(j)}, \tilde{x}_{(j)}) \right]| \right) = 0. \quad (\text{B.11})$$

D'après la définition de la consistance (B.11), tous les θ -schémas sont consistants.

B.2.3 Convergence

Soit $\Delta t = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_{(j)}$. L'approximation $(\tilde{x}_{(j)})_{1 \leq j \leq n}$ donnée par le θ -schéma (B.4) est *convergente* si l'erreur sur l'approximation de la condition initiale s'annule avec Δt , $\tilde{x}_{(0)} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} x_{(0)}$, alors l'erreur maximale sur l'approximation de x par \tilde{x} s'annule avec Δt telle que :

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x(t_{(j)}) - \tilde{x}_{(j)}| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (\text{B.12})$$

De plus, si le schéma (B.4) est stable et consistant et si $|\tilde{x}_{(0)} - x(0)| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, alors ce schéma est convergent.

Avec la définition (B.12) de la convergence ou en sachant que les θ -schémas sont stables et consistants (voir les annexes B.2.1 et B.2.2), tous les θ -schémas sont convergents.

B.2.4 Ordre de convergence

La stabilité et la consistance d'un schéma permettent d'établir la convergence du schéma. L'ordre d'un schéma permet de définir la rapidité de convergence d'un schéma.

Un schéma est d'*ordre* p , avec $p \in \mathbb{N}$, si étant donnée une solution x du problème (B.1), alors la somme des erreurs locales en valeur absolue est majorée, à une constante multiplicative près, par le pas de temps Δt à la puissance p telle que :

$$\exists C > 0, \sum_{j=0}^{n-1} |\epsilon_{(j)}| \leq C \Delta t^p. \quad (\text{B.13})$$

Alors le θ -schéma (B.4) est d'ordre p , si étant donnée une solution x du problème de Cauchy (B.1), alors la majoration (B.13) avec $\epsilon_{(j)}$ défini par l'équation (B.9) est respectée telle que :

$$\exists C > 0, \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{(j+1)}) - x(t_{(j)}) - \Delta t_{(j)} [\theta f(t_{(j+1)}, \tilde{x}_{(j+1)}) + (1 - \theta) f(t_{(j)}, \tilde{x}_{(j)})]| \leq C \Delta t^p. \quad (\text{B.14})$$

Avec la définition (B.14) de l'ordre, tous les θ -schémas sont d'ordre 1, sauf le schéma de Crank-Nicholson, où θ vaut $\frac{1}{2}$, qui est d'ordre 2.

B.2.5 Stabilité numérique

Le θ -schéma numérique (B.4) est *A-stable*, ou *inconditionnellement A-stable*, si les approximations $\tilde{x}_{(j)}$ du problème (B.2) vérifient la condition telle que :

$$\forall \Delta t > 0, \tilde{x}_{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{B.15})$$

Le θ -schéma numérique (B.4) est *conditionnellement A-stable*, ou *A-instable*, si les approximations $\tilde{x}_{(j)}$ du problème (B.2) vérifient la condition telle que :

$$\exists \Delta t^* > 0, \forall \Delta t < \Delta t^*, \tilde{x}_{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{B.16})$$

Le plus grand des Δt^* est appelé le *rayon de stabilité* et il est noté R .

Avec les définitions (B.15) et (B.16) de l'A-stabilité d'un schéma, les θ -schémas sont inconditionnellement A-stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$. Alors le rayon de stabilité des méthodes de Crank-Nicholson, de Galerkin, de Liniger ou d'Euler implicite est $R = \infty$.

Cependant lorsque $\theta < \frac{1}{2}$, le schéma est conditionnellement A-stable avec un rayon de stabilité R différent de l'infini. Donc la méthode d'Euler explicite est conditionnellement A-stable, c'est-à-dire qu'elle est A-stable si et seulement si $\Delta t < R$.

D'après cette étude des θ -schémas, il vaut mieux utiliser un θ -schéma avec $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. La méthode d'Euler explicite ne doit pas être utilisée, même si elle est simple à mettre en œuvre, parce qu'elle est conditionnellement A-stable. Il vaut mieux utiliser la méthode d'Euler implicite qui est inconditionnellement A-stable. Mais, le meilleur θ -schéma est la méthode de Crank-Nicholson, parce qu'elle est inconditionnellement A-stable et qu'elle converge deux fois plus vite que les méthodes d'Euler explicite et implicite.

Annexe C

Méthode de Newton-Raphson

Sommaire

C.1	Méthode de Newton-Raphson	248
C.1.1	Problème à résoudre	248
C.1.2	A chaque itération	248
C.1.3	Critère d'arrêt	249
C.2	Étude de la méthode de Newton-Raphson	250
C.2.1	Convergence	250
C.2.2	Ordre de convergence	250

La *méthode de Newton-Raphson* est une généralisation de la méthode de la tangente. C'est une méthode itérative qui permet de trouver numériquement une approximation précise des racines d'une fonction.

C.1 Méthode de Newton-Raphson

C.1.1 Problème à résoudre

La méthode de Newton-Raphson permet de résoudre le problème tel que :

$$C(\mathbf{X}) = 0, \quad (\text{C.1})$$

avec $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T \in \mathbb{R}^N$ et $C = (C_1, C_2, \dots, C_N)^T$ où C_i appartient à l'ensemble des fonctions qui vont de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Cette méthode itérative construit une suite de vecteurs $\mathbf{X}^{(n)}$, à partir d'un vecteur initial $\mathbf{X}^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_N^{(0)})^T$. La suite $\mathbf{X}^{(n)}$ converge vers la solution du problème (C.1), si les conditions de convergence, données dans l'annexe C.2, sont respectées.

Dans la prochaine sous-section, la méthode de Newton-Raphson sera étudiée pour trouver les racines du problème (C.1), décrit dans cette sous-section.

C.1.2 A chaque itération

A chaque itération $n + 1$, la méthode de Newton-Raphson consiste à calculer un vecteur $\mathbf{X}^{(n+1)}$ à partir du vecteur $\mathbf{X}^{(n)}$, obtenu à l'itération précédente n , tel que :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} + \Delta\mathbf{X}^{(n+1)}, \quad (\text{C.2})$$

avec $\Delta\mathbf{X}^{(n+1)}$ le vecteur des incréments de l'inconnue.

A l'itération $n+1$, le problème à résoudre pour calculer $\mathbf{X}^{(n+1)}$, ou $\Delta\mathbf{X}^{(n+1)}$ (C.2), est déduit du problème initial (C.1) tel que :

$$C(\mathbf{X}^{(n+1)}) = C(\mathbf{X}^{(n)} + \Delta\mathbf{X}^{(n+1)}) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Le problème en $\mathbf{X}^{(n+1)}$ (C.3) est approché par le développement de Taylor au premier ordre centré sur $\mathbf{X}^{(n)}$ tel que :

$$C(\mathbf{X}^{(n)} + \Delta\mathbf{X}^{(n+1)}) \approx C(\mathbf{X}^{(n)}) + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^{(n)}) \Delta\mathbf{X}^{(n+1)}. \quad (\text{C.4})$$

A l'itération $n+1$, l'incrément $\Delta\mathbf{X}^{(n+1)}$ est déterminé en résolvant le problème en $\Delta\mathbf{X}^{(n+1)}$ (C.3) avec le développement de Taylor (C.4) tel que :

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^{(n)}) \Delta\mathbf{X}^{(n+1)} = -C(\mathbf{X}^{(n)}). \quad (\text{C.5})$$

En particulier, lorsque C est de la forme $C(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) \mathbf{X} - \mathbf{M}(\mathbf{X})$, avec R une matrice de taille $P * N$, \mathbf{X} un vecteur de taille N et \mathbf{M} un vecteur de taille P , le problème en $\Delta\mathbf{X}^{(n+1)}$ à résoudre (C.5) devient :

$$\left(R(\mathbf{X}^{(n)}) + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{X}^{(n)} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^{(n)}) \right) \Delta\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{M}(\mathbf{X}^{(n)}) - R(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{X}^{(n)}. \quad (\text{C.6})$$

Dans cette sous-section, chaque itération de la méthode de Newton-Raphson a été décrite. Dans la prochaine sous-section, le critère d'arrêt de cette méthode sera donné.

C.1.3 Critère d'arrêt

Le processus itératif de la méthode de Newton-Raphson est arrêté lorsque l'incrément vérifie la condition telle que :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{X}^{(n+1)}\|}{\|\mathbf{X}^{(n+1)}\|} \leq \epsilon,$$

avec ϵ une valeur choisie arbitrairement (par exemple, 10^{-4}).

Dans cette section, la méthode de Newton-Raphson a été détaillée. Dans la prochaine section, la convergence de cette méthode sera étudiée.

C.2 Étude de la méthode de Newton-Raphson

Soit $C = (C_1, C_2, \dots, C_N)^T$ où C_i appartient à l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^2 qui vont de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Soit $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_N^*)^T \in \mathbb{R}^N$ la solution du problème (C.1).

C.2.1 Convergence

Si $C(\mathbf{X}^*) = 0$ et $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^*) \neq 0$ alors il existe $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)^T$ avec $\delta_i > 0$ tel que la méthode de Newton-Raphson converge pour tout élément $\mathbf{X}^{(0)} \in [X_1^* - \delta_1, X_1^* + \delta_1] \times [X_2^* - \delta_2, X_2^* + \delta_2] \times \dots \times [X_N^* - \delta_N, X_N^* + \delta_N]$.

C.2.2 Ordre de convergence

Si $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^*) \neq 0$, la méthode de Newton-Raphson converge quadratiquement, ou à l'ordre 2, vers \mathbf{X}^* dans un voisinage de \mathbf{X}^* tel que :

$$|\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^*| \leq \alpha |\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^*|^2, \quad (\text{C.7})$$

pour $\alpha > 0$, n suffisamment grand et $\mathbf{X}^{(n+1)}$ suffisamment proche de \mathbf{X}^* .

En revanche, si $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{X}^T}(\mathbf{X}^*) = 0$, la méthode de Newton-Raphson converge linéairement, ou à l'ordre 1, vers \mathbf{X}^* dans un voisinage de \mathbf{X}^* .

En pratique, lorsque le vecteur initial $\mathbf{X}^{(0)}$ se trouve proche de la solution \mathbf{X}^* du problème (C.1), la méthode de Newton-Raphson converge vite, en quelques itérations, grâce à sa convergence quadratique. En revanche, si le vecteur initial $\mathbf{X}^{(0)}$ est trop éloigné de la solution \mathbf{X}^* , la méthode de Newton-Raphson peut diverger ou entrer en boucle infinie. Donc, toute implémentation informatique de la méthode de Newton-Raphson doit inclure un nombre d'itérations maximal.

Lorsque des difficultés de convergence apparaissent, il est usuel de sous-relaxer le calcul de $\mathbf{X}^{(n+1)}$ (C.2) tel que :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} + \lambda \Delta \mathbf{X}^{(n+1)},$$

avec le coefficient de relaxation $\lambda \in [0, 1]$. Ce coefficient peut être choisi arbitrairement ou déterminé algorithmiquement, par exemple en minimisant la norme de $C(\mathbf{X}^{(n)} + \lambda \Delta \mathbf{X}^{(n+1)})$.

Annexe D

Formulations en potentiel vecteur magnétique pour des problèmes magnétostatiques et magnétoharmoniques

Sommaire

D.1	Formulations pour des problèmes magnétostatiques	252
D.1.1	Formulations faibles	252
D.1.1.1	Formulation en \mathbf{A}	252
D.1.1.2	Formulation en \mathbf{A}_r	253
D.1.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	253
D.1.2.1	Formulation en \mathbf{A}	253
D.1.2.1.1	Formulation matricielle	253
D.1.2.1.2	Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson	254
D.1.2.2	Formulation en \mathbf{A}_r	255
D.2	Formulations pour des problèmes magnétoharmoniques	256
D.2.1	Formulations faibles	256
D.2.1.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	256
D.2.1.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	257
D.2.2	Modélisation discrète avec les éléments finis	257
D.2.2.1	Formulation en $\mathbf{A} - V$	258
D.2.2.1.1	Formulation matricielle	258
D.2.2.1.2	Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson	259
D.2.2.2	Formulation en $\mathbf{A}_r - V$	261

D.1 Formulations pour des problèmes magnéto- statiques

Le modèle magnétostatique (1.9), décrit dans la section 1.2, étudie les phénomènes magnétiques en régime permanent (phénomènes indépendants du temps). Il peut se déduire du modèle magnétique transitoire (1.15), décrit dans la section 1.3 et étudié dans le chapitre 3, en annulant les dérivées en temps et la conductivité σ .

Dans la section 1.2, des formulations fortes en potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_r (1.14) ou total \mathbf{A} (1.11) ont été déduites du modèle magnétostatique (1.9). Dans cette section, ces formulations (1.11) et (1.14) seront détaillées sous leurs formes faibles, puis sous leurs formes matricielles.

D.1.1 Formulations faibles

D.1.1.1 Formulation en \mathbf{A}

La formulation faible en \mathbf{A} de la magnétostatique sera étudiée à partir de sa formulation forte (1.11), décrite dans la sous-section 1.2.1. Une formule de Green (A.10), décrite dans l'annexe A.2.4, sera appliquée sur cette formulation forte (1.11) pour en déduire une formulation faible.

En appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, au potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et à une fonction test \mathbf{A}' à définir, la formulation forte en \mathbf{A} (1.11a) devient :

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}. \quad (\text{D.1})$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.11b) de la formulation forte en \mathbf{A} , le terme $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_b)}$, car $\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_h$. D'après la loi de comportement (1.9d) et la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.9e) de la magnétostatique, $\mathbf{n} \times \mathbf{B}_r|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ alors le terme $\langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_b)}$, car $\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_h$. Donc l'espace $\mathbf{E}_{\mathbf{b}0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{b}}^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}\}$ est défini pour la fonction test \mathbf{A}' tel que $\operatorname{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_b)} = \langle \nu \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_b)} = 0$. L'équation (D.1) se réduit alors telle que :

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{b}0}^1(\Omega). \quad (\text{D.2})$$

L'équation (D.2) prend en compte la condition à la limite pour le potentiel \mathbf{A} sur le bord Γ_h (1.11b) de la formulation forte en \mathbf{A} (1.11), mais elle ne prend pas en compte la condition à la limite sur Γ_b (1.11c). Alors d'après l'équation (D.2) et la condition à la limite (1.11c), la formulation faible en \mathbf{A} , déduite de la formulation forte (1.11), est telle que [Biro *et al.*, 1996] : Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que

$$(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{b}0}^1(\Omega), \quad (\text{D.3a})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}. \quad (\text{D.3b})$$

Dans le prochain paragraphe, la formulation faible en \mathbf{A}_r sera étudiée.

D.1.1.2 Formulation en \mathbf{A}_r

La formulation faible en \mathbf{A}_r est définie, en remplaçant le potentiel \mathbf{A} par \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12) dans la formulation faible en \mathbf{A} (D.3), telle que [Biro *et al.*, 1999] :

Trouver $\mathbf{A}_r \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que

$$(\nu \mathbf{rot} \mathbf{A}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\nu (\mathbf{B}_r - \mathbf{rot} \mathbf{A}_s), \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (\text{D.4a})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}_r|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{b0}}^1(\Omega). \quad (\text{D.4b})$$

Dans la prochaine sous-section, il sera étudié les formulations faibles en \mathbf{A} (D.3) et en \mathbf{A}_r (D.4) de la magnétostatique grâce à la méthode des éléments finis.

D.1.2 Modélisation discrète avec les éléments finis

Dans cette sous-section, toutes les grandeurs magnétiques et électriques ainsi que les potentiels sont considérés au niveau discret, c'est-à-dire qu'ils sont définis sur le maillage du domaine Ω et dans les espaces $W_v^p(\Omega)$, $0 \leq p \leq 3$. Notre but est de définir les formulations faibles de l'annexe D.1.1 sous forme matricielle à l'aide de la décomposition des grandeurs physiques sur les éléments finis du paragraphe 2.2.4.5, afin d'obtenir des systèmes linéaires à résoudre.

D.1.2.1 Formulation en \mathbf{A}

D.1.2.1.1 Formulation matricielle

Les variables de la formulation faible en \mathbf{A} (D.3), \mathbf{A} et \mathbf{A}' , sont maintenant définies au niveau discret à l'aide de la méthode des éléments finis : $\mathbf{A} \in \mathbf{W}_{\mathbf{b}}^1(\Omega)$ et $\mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^1(\Omega)$.

En injectant la décomposition d' \mathbf{A} (2.44) du paragraphe 2.2.4.5 sur les éléments finis, la formulation faible en \mathbf{A} (D.3) devient :

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_{a_k} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^1(\Omega). \quad (\text{D.5})$$

La méthode de Galerkin consiste à définir la fonction test \mathbf{A}' telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$ (car l'équation (D.5) est valable pour tout \mathbf{A}' dans $\mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^1(\Omega)$ donc pour la valeur particulière $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \in \mathbf{W}_{\mathbf{b0}}^1(\Omega)$). Alors, l'équation (D.5) devient :

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_{a_k} (\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \forall a_l \in A. \quad (\text{D.6})$$

L'équation (D.6) prend en compte la condition à la limite sur le bord Γ_h pour le potentiel \mathbf{A} comme la formulation faible en \mathbf{A} (D.3), mais elle ne prend pas en compte la condition à la limite sur Γ_b pour \mathbf{A} . Alors d'après l'équation (D.6), la formulation matricielle en \mathbf{A} , déduite de la formulation faible (D.3), est telle que [Biro *et al.*, 1996] :

$$R_{RR_\nu} \mathbf{A}_a = \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} + \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{B}_{r\nu}}, \quad (\text{D.7a})$$

$$\mathbf{A}_a|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.7b})$$

avec

$$\begin{aligned}
- R_{RR\nu} &= \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\
- \mathbf{A}_{\mathbf{a}} &= [A_{a_k}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{B}_{r\nu}} &= \left[(\nu \mathbf{B}_r, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}.
\end{aligned}$$

La formulation matricielle en \mathbf{A} (D.7) permet de calculer le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} . Cependant, si les matériaux sont non-linéaires, alors la perméabilité μ et la réductivité ν dépendent aussi de l'inconnue \mathbf{A} de la formulation. Alors, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre la formulation matricielle en \mathbf{A} (D.7), devenue une équation non-linéaire.

D.1.2.1.2 Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson

La loi de comportement d'un matériau peut ne pas être linéaire. Si la loi de comportement magnétique $\mathbf{H} = \nu (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)$ (1.9d) n'est pas linéaire, alors la réductivité ν dépend du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , car ν dépend de \mathbf{B} (1.9d) et $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ (1.10). La formulation matricielle en \mathbf{A} (D.7) est plus difficile à résoudre avec ν dépendant du potentiel \mathbf{A} . Pour la résoudre, la méthode de Newton-Raphson, expliquée dans l'annexe C, est utilisée.

La méthode de Newton-Raphson consiste à calculer à chaque itération, un vecteur $\mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)}$ à partir du vecteur $\mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n)}$ obtenu à l'itération précédente tel que :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n)} + \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)}. \quad (\text{D.8})$$

L'incrément $\Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)}$ est calculé en résolvant la formulation matricielle en \mathbf{A} (D.7) avec la méthode de Newton-Raphson tel que :

$$R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}^{(n)}}, \quad (\text{D.9a})$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.9b})$$

avec

$$\begin{aligned}
- \mathbf{B}^{(n)} &= \mathbf{rot} \mathbf{A}^{(n)}, \\
- \mathbf{H}^{(n)} &= \nu (\mathbf{B}^{(n)}) (\mathbf{rot} \mathbf{A}^{(n)} - \mathbf{B}_r), \\
- R_{RR} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\
- \Delta \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} &= \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} - \mathbf{A}_{\mathbf{a}}^{(n)} = [\Delta A_{a_k}^{(n+1)}]_{1 \leq k \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\
- \mathbf{M}_{\mathbf{R}\mathbf{H}^{(n)}} &= \left[(\mathbf{H}^{(n)}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}.
\end{aligned}$$

La forme matricielle (D.9) exprime la formulation en \mathbf{A} pour des matériaux non-linéaires, avec $\frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} = \nu (\mathbf{B}^{(n)}) + \frac{\partial \nu (\mathbf{B}^{(n)})}{\partial \mathbf{B}^{(n)T}} (\mathbf{B}^{(n)} - \mathbf{B}_r)$.

La formulation matricielle en \mathbf{A} (D.9) a été détaillée en régime permanent. Dans le prochain paragraphe, la formulation faible en \mathbf{A}_r (D.4) sera étudiée en régime permanent sous sa forme matricielle.

D.1.2.2 Formulation en \mathbf{A}_r

La formulation matricielle en \mathbf{A}_r , avec la méthode de Newton-Raphson, est identique à la formulation matricielle en \mathbf{A} (D.9), en remplaçant $\Delta \mathbf{A}_a^{(n+1)}$ par $\Delta \mathbf{A}_{ra}^{(n+1)} = \left[\Delta A_{ra_k}^{(n+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}$ et avec les grandeurs magnétiques définies telles que [Biro *et al.*, 1999] :

$$\begin{aligned} - \mathbf{B}^{(n)} &= \text{rot } \mathbf{A}_r^{(n)} + \text{rot } \mathbf{A}_s, \\ - \mathbf{H}^{(n)} &= \nu (\mathbf{B}^{(n)}) \left[\text{rot } \mathbf{A}_r^{(n)} + \text{rot } \mathbf{A}_s - \mathbf{B}_r \right]. \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, la formulation matricielle en \mathbf{A}_r a été étudiée, elle est identique à la formulation matricielle en \mathbf{A} (D.9) en remplaçant l'incrément $\Delta \mathbf{A}_a^{(n+1)}$ par $\Delta \mathbf{A}_{ra}^{(n+1)}$. La différence entre les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{A}_r est le calcul des grandeurs magnétiques. Pour la formulation en \mathbf{A}_r , les expressions des grandeurs magnétiques, \mathbf{B} et \mathbf{H} , font apparaître la source \mathbf{A}_s . Donc, elles dépendent du calcul choisi pour le terme source \mathbf{A}_s . En revanche pour la formulation en \mathbf{A} , ces grandeurs \mathbf{B} et \mathbf{H} auront toujours la même expression, parce qu'elles ne font pas apparaître le terme source \mathbf{A}_s .

Dans cette section, les formulations matricielles en potentiel vecteur réduit \mathbf{A}_r ou total \mathbf{A} (D.9) ont été étudiées en régime stationnaire. Dans la prochaine section, ces formulations seront détaillées en régime harmonique.

D.2 Formulations pour des problèmes magnétoharmoniques

Le modèle magnétoharmonique (1.20), décrit dans la section 1.4, étudie les phénomènes magnétiques en régime harmonique (phénomènes dépendants du temps, alimentations sinusoïdales, matériaux linéaires et formalisme complexe (1.19)). Il peut se déduire du modèle magnétique transitoire (1.15), décrit dans la section 1.3 et étudié dans le chapitre 3, en représentant les grandeurs par le formalisme complexe (1.19) pour lequel $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$.

Dans la section 1.4, des formulations fortes en potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A} - V$ (1.21) et en potentiel vecteur magnétique réduit $\mathbf{A}_r - V$ (1.22) ont été déduites du modèle magnétoharmonique (1.20). Dans cette section, ces formulations (1.21) et (1.22) seront détaillées sous leurs formes faibles, puis sous leurs formes matricielles.

D.2.1 Formulations faibles

Dans la section 3.1, les formulations faibles en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.5)–(3.6) de la magnétique transitoire ont été étudiées. En magnétoharmonique, les formulations faibles en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ peuvent se déduire de ces formulations (3.5)–(3.6) en utilisant le formalisme complexe (1.19) et en remplaçant les dérivées en temps $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j\omega$.

D.2.1.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

La formulation faible en $\mathbf{A} - V$ de la magnétoharmonique sera étudiée à partir de sa formulation forte (1.21), décrite dans la sous-section 1.4.1. Des formules de Green (A.10), décrites dans l'annexe A.2.4, seront appliquées sur la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.21) pour en déduire une formulation faible.

Dans un premier temps, en appliquant la formule de Green (A.10b), démontrée dans l'annexe A.2.4.2, au potentiel vecteur magnétique $\underline{\mathbf{A}}$, au potentiel scalaire électrique \underline{V} et à une fonction test \mathbf{A}' à définir, la première équation de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.21a) devient :

$$(\nu \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + (j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \operatorname{grad} \underline{V}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\underline{\mathbf{J}}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (\text{D.10})$$

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.21c) de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$, le terme $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ devient $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)}$. Donc, l'espace $\mathbf{E}_{e0}^1(\Omega) = \{\mathbf{A}' \in \mathbf{E}_e^1(\Omega), \mathbf{A}'|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}\}$ est défini pour la fonction test \mathbf{A}' tel que $\operatorname{rot} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle \nu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma_e)} = 0$. L'équation (D.10) se réduit alors telle que :

$$(\nu \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \operatorname{grad} \underline{V}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\underline{\mathbf{J}}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega). \quad (\text{D.11})$$

Dans un second temps, en appliquant la formule de Green (A.10a), démontrée dans l'annexe A.2.4.1, aux potentiels $\underline{\mathbf{A}}$ et \underline{V} et à une fonction test V' à définir, la deuxième équation de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.21b) devient :

$$(j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}, \operatorname{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle j\omega \sigma \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}}, V' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + (\sigma \operatorname{grad} \underline{V}, \operatorname{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \sigma \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \underline{V}, V' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = 0. \quad (\text{D.12})$$

D.2. FORMULATIONS POUR DES PROBLÈMES MAGNÉTOHARMONIQUES

D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \underline{\mathbf{A}}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$ (1.21c) et l'implication (A.15) de l'annexe A.2.5.3, le terme $\langle j\omega \sigma \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}}, V' \rangle_{L^2(\Gamma)}$ devient $\langle j\omega \sigma \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}}, V' \rangle_{L^2(\Gamma_e)}$, car $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}}|_{\Gamma_h} = 0$. D'après la condition à la limite $\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \underline{V}|_{\Gamma_h} = 0$ (1.21e) de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$, le terme $\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \underline{V}, V' \rangle_{L^2(\Gamma)}$ devient $\langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \underline{V}, V' \rangle_{L^2(\Gamma_e)}$. Alors la fonction test V' est définie telle qu'elle appartienne à $E_{e0}^0(\Omega) = \{V' \in E_e^0(\Omega), V'|_{\Gamma_e} = 0\}$ pour que $\mathbf{grad} V' \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\langle j\omega \sigma \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}}, V' \rangle_{L^2(\Gamma_e)} = \langle \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \underline{V}, V' \rangle_{L^2(\Gamma_e)} = 0$. L'équation (D.12) se réduit alors telle que :

$$(j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} \underline{V}, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega). \quad (\text{D.13})$$

Les équations (D.11) et (D.13) prennent en compte faiblement les conditions aux limites sur le bord Γ_h pour les potentiels \mathbf{A} (1.21c) et V (1.21e) de la formulation forte en $\mathbf{A} - V$ (1.21), mais elles ne prennent pas en compte les conditions aux limites sur Γ_e pour \mathbf{A} (1.21d) et V (1.21f). Alors en ajoutant les conditions aux limites (1.21d) et (1.21f) aux équations (D.11) et (D.13), la formulation faible en $\mathbf{A} - V$, déduite de la formulation forte (1.21), est telle que :

Trouver $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $\underline{V} \in H(\mathbf{grad}, \Omega)$ tel que

$$(\nu \mathbf{rot} \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} \underline{V}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\underline{\mathbf{J}}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega), \quad (\text{D.14a})$$

$$(j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} \underline{V}, V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0, \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega), \quad (\text{D.14b})$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{A}}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.14c})$$

$$\underline{V}|_{\Gamma_e} = 0. \quad (\text{D.14d})$$

Dans le prochain paragraphe, la formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ sera étudiée.

D.2.1.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

La formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ de la magnétoharmonique sera étudiée à partir de sa formulation forte (1.22), décrite dans la sous-section 1.4.2, et de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (D.14), en remplaçant \mathbf{A} par \mathbf{A}_r et \mathbf{A}_s (1.12). La formulation faible en $\mathbf{A}_r - V$ est définie telle que [Biro et Preis, 2000]-[Xu et Simkin, 2004] :

Trouver $\underline{\mathbf{A}}_r \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $\underline{V} \in H(\mathbf{grad}, \Omega)$ tel que

$$(\nu \mathbf{rot} \underline{\mathbf{A}}_r, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}_r, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} \underline{V}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\underline{\mathbf{J}}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (\nu \mathbf{rot} \underline{\mathbf{A}}_s, \mathbf{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}_s, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{E}_{e0}^1(\Omega) \quad (\text{D.15a})$$

$$(j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}_r, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{grad} \underline{V}, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (j\omega \sigma \underline{\mathbf{A}}_s, \mathbf{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall V' \in E_{e0}^0(\Omega) \quad (\text{D.15b})$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{A}}_r|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.15c})$$

$$\underline{V}|_{\Gamma_e} = 0. \quad (\text{D.15d})$$

Dans la prochaine sous-section, il sera étudié l'approximation d'une formulation faible de la magnétoharmonique grâce à la méthode des éléments finis.

D.2.2 Modélisation discrète avec les éléments finis

Dans cette sous-section, toutes les grandeurs magnétiques et électriques ainsi que les potentiels sont considérés au niveau discret, c'est-à-dire qu'ils sont définis sur le maillage du

domaine Ω et dans les espaces $W_v^p(\Omega)$, $0 \leq p \leq 3$. Notre but est de définir les formulations faibles de l'annexe D.2.1 sous forme matricielle à l'aide de la décomposition des grandeurs physiques sur les éléments finis du paragraphe 2.2.4.5.

De plus, ces formulations matricielles en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ de la magnétoharmonique peuvent aussi se déduire des formulations matricielles en $\mathbf{A} - V$ (3.16) et en $\mathbf{A}_r - V$ (3.17) de la magnétique transitoire, étudiées dans la section 3.2, en utilisant le formalisme complexe (1.19) et en remplaçant les dérivées en temps $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j\omega$.

D.2.2.1 Formulation en $\mathbf{A} - V$

Les variables de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (D.14), \underline{V} , V' , $\underline{\mathbf{A}}$ et \mathbf{A}' , sont maintenant définies au niveau discret à l'aide de la méthode des éléments finis : $\underline{V} \in W_e^0(\Omega)$, $V' \in W_{e0}^0(\Omega)$, $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_e^1(\Omega)$ et $\mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{e0}^1(\Omega)$.

D.2.2.1.1 Formulation matricielle

En injectant les décompositions de V (2.43) et \mathbf{A} (2.44) du paragraphe 2.2.4.5 sur les éléments finis, les équations de la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (D.14) sont telles que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} \underline{A_{a_k}} \left[(\nu \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \operatorname{rot} \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (j\omega \sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] \\ + \sum_{i=1}^{n_N} \underline{V_{n_i}} (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\underline{\mathbf{J}_s}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (\text{D.16a})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} \underline{A_{a_k}} (j\omega \sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \operatorname{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n_N} \underline{V_{n_i}} (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}, \operatorname{grad} V')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0 \\ \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{W}_{e0}^1(\Omega), \forall V' \in W_{e0}^0(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{D.16b})$$

La méthode de Galerkin consiste à définir la fonction test $\mathbf{A}' = \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}$, avec $1 \leq l \leq n_A$ (car l'équation (D.16a) est valable pour tout \mathbf{A}' dans $\mathbf{W}_{e0}^1(\Omega)$ donc en particulier, pour $\mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \in \mathbf{W}_{e0}^1(\Omega)$) et $V' = w_{n_j}$, avec $1 \leq j \leq n_N$ (car l'équation (D.16b) est valable pour tout V' dans $W_{e0}^0(\Omega)$ donc en particulier, pour $w_{n_j} \in W_{e0}^0(\Omega)$). L'équation (D.16) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} \underline{A_{a_k}} \left[(\nu \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \operatorname{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (j\omega \sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right] \\ + \sum_{i=1}^{n_N} \underline{V_{n_i}} (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\underline{\mathbf{J}_s}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (\text{D.17a})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_A} \underline{A_{a_k}} (j\omega \sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \operatorname{grad} w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n_N} \underline{V_{n_i}} (\sigma \operatorname{grad} w_{n_i}, \operatorname{grad} w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0 \\ \forall a_l \in A, \forall n_j \in N. \end{aligned} \quad (\text{D.17b})$$

Les équations (D.17a) et (D.17b) prennent en compte faiblement les conditions aux limites sur le bord Γ_h pour les potentiels \mathbf{A} et V comme la formulation faible en $\mathbf{A} - V$ (D.14), mais elles ne prennent pas en compte les conditions aux limites sur Γ_e pour \mathbf{A} et V . Alors avec les équations (D.17), la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$, déduite de la formulation faible (D.14),

est telle que :

$$(R_{RR\nu} + j\omega R_{AA\sigma}) \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}} + R_{AG\sigma} \underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s}, \quad (\text{D.18a})$$

$$j\omega R_{AG\sigma}^T \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}} + R_{GG\sigma} \underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.18b})$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.18c})$$

$$\underline{V}|_{\Gamma_e} = 0, \quad (\text{D.18d})$$

avec

$$\begin{aligned} - R_{RR\nu} &= \left[(\nu \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}} &= \left[\underline{A_{a_k}} \right]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ - R_{AA\sigma} &= \left[(\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ - R_{AG\sigma} &= \left[(\sigma \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l}, \mathbf{grad} w_{n_i})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}, \\ - \underline{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} &= \left[\underline{V_{n_i}} \right]_{1 \leq i \leq n_N}, \\ - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\mathbf{J}_s} &= \left[(\mathbf{J}_s, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ - R_{GG\sigma} &= \left[(\sigma \mathbf{grad} w_{n_i}, \mathbf{grad} w_{n_j})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}. \end{aligned}$$

La résolution d'un système matriciel converge plus rapidement si la matrice est symétrique. Or, la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.18) n'est pas symétrique. Comme en magnétique transitoire (voir paragraphe 3.2.1.1), le potentiel scalaire électrique intégré complexe \underline{v} est défini tel que :

$$\underline{V} = j\omega \underline{v}. \quad (\text{D.19})$$

La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.18) permet de calculer le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel scalaire électrique V . Cependant, si les matériaux sont non-linéaires, alors la perméabilité μ , la réductivité ν , la conductivité σ et la résistivité ρ dépendent aussi des inconnues \mathbf{A} et V de la formulation en $\mathbf{A} - V$. Alors, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.18), devenue une équation non-linéaire.

D.2.2.1.2 Matériaux non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson

La loi de comportement d'un matériau peut ne pas être linéaire. Si la loi de comportement magnétique $\underline{\mathbf{H}} = \nu \underline{\mathbf{B}}$ (1.20f) n'est pas linéaire, alors la réductivité ν dépend du potentiel vecteur magnétique $\underline{\mathbf{A}}$, car ν dépend de $\underline{\mathbf{B}}$ (1.20f) et $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{rot} \underline{\mathbf{A}}$ (1.10). Si la loi d'Ohm locale $\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}$ (1.20g) n'est pas linéaire, alors la conductivité σ dépend des potentiels $\underline{\mathbf{A}}$ et \underline{V} , car σ dépend d' $\underline{\mathbf{E}}$ (1.20g) et $\underline{\mathbf{E}} = -j\omega (\underline{\mathbf{A}} + \mathbf{grad} \underline{v})$ (1.16)-(D.19). La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.18) est plus difficile à résoudre avec ν et σ dépendant des potentiels $\underline{\mathbf{A}}$ et \underline{v} . Pour la résoudre, la méthode de Newton-Raphson, expliquée dans l'annexe C, est utilisée.

La méthode de Newton-Raphson consiste à calculer à chaque itération, des vecteurs $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)}$ et $\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)}$ à partir des vecteurs $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n)}$ et $\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n)}$ obtenus à l'itération précédente, tels que :

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n)} + \Delta \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} \quad (\text{D.20})$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n)} + \Delta \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)}. \quad (\text{D.21})$$

Les incréments $\Delta \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)}$ et $\Delta \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)}$ sont calculés en résolvant la formulation matricielle

en $\mathbf{A} - V$ (D.18) avec la méthode de Newton-Raphson tels que :

$$\begin{pmatrix} R_{RR} \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} + j\omega R_{AA} \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} & j\omega R_{AG} \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} \\ j\omega R_{AG}^T \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} & j\omega R_{GG} \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Delta \mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} \\ \underline{\Delta \mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \quad (\text{D.22a})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{A}\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}}} + \mathbf{M}_{\mathbf{A}\underline{\mathbf{J}}}^{(n)} - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\underline{\mathbf{H}}}^{(n)} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{G}\underline{\mathbf{J}}}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.22b})$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_e} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.22c})$$

$$\underline{v}^{(n+1)} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \quad (\text{D.22d})$$

où

$$\begin{aligned} & - \underline{\mathbf{B}}^{(n)} = \text{rot } \underline{\mathbf{A}}^{(n)}, \\ & - \underline{\mathbf{H}}^{(n)} = \nu \left(\underline{\mathbf{B}}^{(n)} \right) \text{rot } \underline{\mathbf{A}}^{(n)}, \\ & - \underline{\mathbf{E}}^{(n)} = -j\omega \left[\underline{\mathbf{A}}^{(n)} + \text{grad } \underline{v}^{(n)} \right], \\ & - \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)} = -j\omega \sigma \left(\underline{\mathbf{E}}^{(n)} \right) \left[\underline{\mathbf{A}}^{(n)} + \text{grad } \underline{v}^{(n)} \right], \\ & - R_{RR} \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{B}}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{H}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{B}}^{(n)T}} \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ & - R_{AA} \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} \mathbf{w}_{\mathbf{a}_k}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l, k \leq n_A}, \\ & - R_{AG} \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} \text{grad } w_{n_i}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A, 1 \leq i \leq n_N}, \\ & - R_{GG} \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} = \left[\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} \text{grad } w_{n_i}, \text{grad } w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j, i \leq n_N}, \\ & - \underline{\Delta \mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n+1)} - \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{a}}^{(n)} = \left[\underline{\Delta A}_{a_k}^{(n+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}, \\ & - \underline{\Delta \mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n+1)} - \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{(n)} = \left[\underline{\Delta v}_{n_i}^{(n+1)} \right]_{1 \leq i \leq n_N}, \\ & - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}}} = \left[\left(\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{s}}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ & - \mathbf{M}_{\mathbf{A}\underline{\mathbf{J}}}^{(n)} = \left[\left(\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}, \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ & - \mathbf{M}_{\mathbf{R}\underline{\mathbf{H}}}^{(n)} = \left[\left(\underline{\mathbf{H}}^{(n)}, \text{rot } \mathbf{w}_{\mathbf{a}_l} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq l \leq n_A}, \\ & - \mathbf{M}_{\mathbf{G}\underline{\mathbf{J}}}^{(n)} = \left[\left(\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}, \text{grad } w_{n_j} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]_{1 \leq j \leq n_N}. \end{aligned}$$

La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.22) est exprimée pour des matériaux non-linéaires,

$$\text{avec } \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{B}}^{(n)T}} = \nu \left(\underline{\mathbf{B}}^{(n)} \right) + \frac{\partial \nu \left(\underline{\mathbf{B}}^{(n)} \right)}{\partial \underline{\mathbf{B}}^{(n)T}} \underline{\mathbf{B}}^{(n)} \text{ et } \frac{\partial \underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{e}}^{(n)}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} = \sigma \left(\underline{\mathbf{E}}^{(n)} \right) + \frac{\partial \sigma \left(\underline{\mathbf{E}}^{(n)} \right)}{\partial \underline{\mathbf{E}}^{(n)T}} \underline{\mathbf{E}}^{(n)}.$$

La formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.22) en régime harmonique a été détaillée. Dans le prochain paragraphe, la formulation matricielle en $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - V$ sera étudiée en régime harmonique sous sa forme matricielle.

D.2.2.2 Formulation en $\mathbf{A}_r - V$

La formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ avec la méthode de Newton-Raphson est identique à celle en $\mathbf{A} - V$ (D.22) en remplaçant l'incrément $\Delta \underline{\mathbf{A}}_a^{(n+1)}$ par l'incrément $\Delta \underline{\mathbf{A}}_{ra}^{(n+1)} = \left[\Delta A_{r_{ak}}^{(n+1)} \right]_{1 \leq k \leq n_A}$. Seulement la définition des grandeurs magnétiques et électriques changent telles que [Biro et Preis, 2000]–[Xu et Simkin, 2004] :

$$\begin{aligned} - \underline{\mathbf{B}}^{(n)} &= \text{rot } \underline{\mathbf{A}}_r^{(n)} + \text{rot } \underline{\mathbf{A}}_s, \\ - \underline{\mathbf{H}}^{(n)} &= \nu \left(\underline{\mathbf{B}}^{(n)} \right) \left[\text{rot } \underline{\mathbf{A}}_r^{(n)} + \text{rot } \underline{\mathbf{A}}_s \right], \\ - \underline{\mathbf{E}}^{(n)} &= -j\omega \left[\underline{\mathbf{A}}_r^{(n)} + \underline{\mathbf{A}}_s + \text{grad } \underline{\mathbf{v}}_n \right], \\ - \underline{\mathbf{J}}_e^{(n)} &= -j\omega \sigma \left(\underline{\mathbf{E}}^{(n)} \right) \left[\underline{\mathbf{A}}_r^{(n)} + \underline{\mathbf{A}}_s + \text{grad } \underline{\mathbf{v}}_n \right]. \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, la formulation matricielle en $\mathbf{A}_r - V$ a été étudiée, elle est identique à la formulation matricielle en $\mathbf{A} - V$ (D.22) en remplaçant l'incrément $\Delta \underline{\mathbf{A}}_a^{(n+1)}$ par $\Delta \underline{\mathbf{A}}_{ra}^{(n+1)}$. La différence entre les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ est faite lors du calcul des termes sources des formulations, étudiés dans le chapitre 4. Pour la formulation en $\mathbf{A}_r - V$, les expressions des grandeurs magnétiques et électriques, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ et $\underline{\mathbf{J}}_e$, font apparaitre les sources $\underline{\mathbf{A}}_s$ et $\underline{\mathbf{H}}_s$. Donc, elles dépendent du calcul choisi pour les termes sources, $\underline{\mathbf{A}}_s$ et $\underline{\mathbf{H}}_s$. En revanche pour la formulation en $\mathbf{A} - V$, ces grandeurs $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ et $\underline{\mathbf{J}}_e$ auront toujours les mêmes expressions, parce qu'elles ne font pas apparaitre les termes sources, $\underline{\mathbf{A}}_s$ et $\underline{\mathbf{H}}_s$.

Dans cette annexe, les formulations en $\mathbf{A} - V$ et en $\mathbf{A}_r - V$ ont été étudiées en régime permanent et harmonique sous leurs formes matricielles pour des matériaux non-linéaires. Ces formulations matricielles permettent de définir le système à résoudre pour calculer \mathbf{A} ou \mathbf{A}_r en magnétostatique, et \mathbf{A} et V , ou \mathbf{A}_r et V en magnétoharmonique.

Bibliographie

- [Abdel-Razek *et al.*, 1981] ABDEL-RAZEK, A. A., COULOMB, J.-L., FELIACHI, M. et SABON-NADIÈRE, J.-C. (1981). The calculation of electromagnetic torque in saturated electric machines within combined numerical and analytical solutions of the field equations. *IEEE Transactions on Magnetism*, 17(6):3250–3252.
- [Abdel-Razek *et al.*, 1982] ABDEL-RAZEK, A. A., COULOMB, J.-L., FELIACHI, M. et SABON-NADIÈRE, J.-C. (1982). Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines. *IEEE Transactions on Magnetism*, 18(2):655–659.
- [Albanese et Rubinacci, 1990] ALBANESE, R. et RUBINACCI, G. (1990). Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(3):515–532.
- [Allen et Rodger, 1996] ALLEN, N. et RODGER, D. (1996). Description of team workshop problem 24 : Nonlinear time-transient rotational test rig. *Proceedings TEAM Workshop in the Sixth Round*, pages 57–60.
- [Amestoy *et al.*, 2015] AMESTOY, P., BUTTARI, A., GUERMOUCHE, A., L’EXCELLENT, J.-Y. et UCAR, B. (2015). *MUltifrontal Massively Parallel Solver (MUMPS 5.0.0) Users’ guide*.
- [Antunes *et al.*, 2004] ANTUNES, O. J., BASTOS, J. P. A. et SADOWSKI, N. (2004). Using high-order finite elements in problems with movement. *IEEE Transactions on Magnetism*, 40(2):529–532.
- [Antunes *et al.*, 2005] ANTUNES, O. J., BASTOS, J. P. A., SADOWSKI, N., RAZEK, A., SANTANDREA, L., BOUILLAUT, F. et RAPETTI, F. (2005). Using hierarchic interpolation with mortar element method for electrical machines analysis. *IEEE Transactions on Magnetism*, 41(5):1472–1475.
- [Antunes *et al.*, 2006] ANTUNES, O. J., BASTOS, J. P. A., SADOWSKI, N., RAZEK, A., SANTANDREA, L., BOUILLAUT, F. et RAPETTI, F. (2006). Comparison between nonconforming movement methods. *IEEE Transactions on Magnetism*, 42(4):599–602.
- [Biro *et al.*, 1999] BIRO, O., PAUL, C., PREIS, K. et RUSSENSCHUCK, S. (1999). Ar formulation using edge elements, for the calculation of 3-d fields in superconducting magnets. *IEEE Transactions on Magnetism*, 35(3):1391–1393.
- [Biro et Preis, 1989] BIRO, O. et PREIS, K. (1989). On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25(4):3145–3159.
- [Biro et Preis, 2000] BIRO, O. et PREIS, K. (2000). An edge finite element eddy current formulation using a reduced magnetic and a current vector potential. *IEEE Transactions on Magnetism*, 36(5):3128–3130.
- [Biro *et al.*, 1990] BIRO, O., PREIS, K., RENHART, W., RICHTER, K. et VRISK, G. (1990). Performance of different vector potential formulations in solving multiply connected 3-d eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetism*, 26(2):438–441.

- [Biro *et al.*, 1996] BIRO, O., PREIS, K. et RICHTER, K. R. (1996). On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3d magnetostatic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):651–654.
- [Bossavit, 1988a] BOSSAVIT, A. (1988a). A rationale for "edge-elements" in 3-d fields computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):74–79.
- [Bossavit, 1988b] BOSSAVIT, A. (1988b). Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings*, 135(8):493–500.
- [Bossavit, 2004] BOSSAVIT, A. (2004). *Electromagnétisme, en vue de la modélisation*. Springer.
- [Boualem et Piriou, 1998] BOUALEM, B. et PIRIOU, F. (1998). Numerical models for rotor cage induction machines using finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3202–3205.
- [Bouillault *et al.*, 2003] BOUILLAUT, F., BUFFA, A., MADAY, Y. et RAPETTI, F. (2003). The mortar edge element method in three dimensions : application to magnetostatics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(4):1303–1327.
- [Bouillault et Razek, 1986] BOUILLAUT, F. et RAZEK, A. (1986). Utilisation d'une formulation mixte (éléments finis-intégrale de frontière) pour modéliser les systèmes électromagnétiques. *Revue de Physique Appliquée*, 21(10):595–601.
- [Bouillault et Razek, 1988] BOUILLAUT, F. et RAZEK, A. (1988). Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):259–261.
- [Bouillault *et al.*, 1990] BOUILLAUT, F., REN, Z. et RAZEK, A. (1990). Modélisation tridimensionnelle des courants de foucault à l'aide de méthodes mixtes avec différentes formulations. *Revue de Physique Appliquée*, 25(7):583–592.
- [Boukari *et al.*, 2000] BOUKARI, N., LEFEVRE, Y. et SPITERI, P. (2000). Modeling the movement of electrostatic motors in a 3d finite element code. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):722–727.
- [Brunotte, 1991] BRUNOTTE, X. (1991). *Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces : Application à la modélisation des aimantations de navires*. Thèse de doctorat, INP Grenoble.
- [Buffa *et al.*, 2000] BUFFA, A., MADAY, Y. et RAPETTI, F. (2000). Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1356–1359.
- [Buffa *et al.*, 2001a] BUFFA, A., MADAY, Y. et RAPETTI, F. (2001a). The mortar element method for 3d maxwell's equations : analysis and application to magnetodynamics. In CHAN, T., KAKO, T., KAWARADA, H. et PIRONNEAU, O., éditeurs : *12th International Conference on Domain Decomposition Methods*, numéro 28.
- [Buffa *et al.*, 2001b] BUFFA, A., MADAY, Y. et RAPETTI, F. (2001b). A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 35(2):191–228.
- [CEDRAT, 2015] CEDRAT (2015). Design solutions for electrical engineering. <http://www.cedrat.com/>.
- [Christmann, 2011] CHRISTMANN, P. (2011). Terres rares : enjeux et perspectives. *Géochronique*, 118.
- [Coulomb, 1981] COULOMB, J.-L. (1981). Finite element three dimensional magnetic field computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 17(6):3241–3246.

- [Coulomb *et al.*, 1997] COULOMB, J.-L., ZGAINSKI, F. c.-X. et MARÉCHAL, Y. (1997). A pyramidal element to link hexahedral, prismatic and tetrahedral edge finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1362–1365.
- [Dautray et Lions, 1987a] DAUTRAY, R. et LIONS, J.-L. (1987a). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques - Modèles physiques*, volume 1. Masson, Paris.
- [Dautray et Lions, 1987b] DAUTRAY, R. et LIONS, J.-L. (1987b). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques - Transformations, Sobolev, Opérateurs*, volume 3. Masson, Paris.
- [Dautray et Lions, 1988] DAUTRAY, R. et LIONS, J.-L. (1988). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques - Méthodes intégrales et numériques*, volume 6. Masson, Paris.
- [Davat *et al.*, 1985] DAVAT, B., REN, Z. et LAJOIE-MAZENC, M. (1985). The movement in field modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6):2296–2298.
- [Dhatt et Touzot, 1981] DHATT, G. et TOUZOT, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine.
- [Dixmier, 1981] DIXMIER, J. (1981). *Topologie générale*. Puf.
- [Dreher *et al.*, 1996] DREHER, T., PERRIN-BIT, R., MEUNIER, G. et COULOMB, J.-L. (1996). A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):1070–1073.
- [Dular, 1996] DULAR, P. (1996). *Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Liège - Faculté des Sciences appliquées.
- [Dular *et al.*, 1994] DULAR, P., HODY, J.-Y., NICOLET, A., GENON, A. et LEGROS, W. (1994). Mixed finite elements associated with a collection of tetrahedra, hexaedra and prisms. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5):2980–2983.
- [Dular *et al.*, 1995] DULAR, P., NICOLET, A., GENON, A. et LEGROS, W. (1995). A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1356–1359.
- [Emson *et al.*, 1998] EMSON, C., RILEY, C., WALSH, D., UEDA, K. et KUMANO, T. (1998). Modelling eddy currents induced by rotating systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):2593–2596.
- [Ern, 2005] ERN, A. (2005). *Éléments finis : aide-mémoire*. Dunod : l’Usine Nouvelle.
- [Feliachi *et al.*, 1983] FELIACHI, M., COULOMB, J.-L. et MANSIR, H. (1983). Second order air-gap element for the dynamic finite-element analysis of the electromagnetic field in electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19(6):2300–2303.
- [Ferrouillat *et al.*, 2016] FERROUILLAT, P., GUÉRIN, C., MEUNIER, G., RAMDANE, B., DULAR, P., LABIE, P. et DUPUY, D. (2016). Computation of source for non-meshed coils in a reduced domain with a-v formulation. *IEEE Transactions on Magnetics*.
- [Ferrouillat *et al.*, 2015] FERROUILLAT, P., GUÉRIN, C., MEUNIER, G., RAMDANE, B., LABIE, P. et DUPUY, D. (2015). Computations of source for non-meshed coils with a-v formulation using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3).
- [Flux, 2015] FLUX (2015). <http://www.cedrat.com/fr/software/flux.html>.
- [Fournet, 1985] FOURNET, G. (1985). *Electromagnétisme à partir des équations locales*. Masson, Paris.

- [Fujiwara *et al.*, 1993] FUJIWARA, K., NAKATA, T. et FUSAYASU, H. (1993). Acceleration of convergence characteristic of the iccg method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1958–1961.
- [G2Elab, 2015] G2ELAB (2015). Laboratoire de recherche en génie électrique - grenoble inp - g2elab. <http://www.g2elab.grenoble-inp.fr/>.
- [Golias et Tsiboukis, 1994] GOLIAS, N. A. et TSIBOUKIS, T. D. (1994). Magnetostatics with edge elements : A numerical investigation in the choice of the tree. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5):2877–2880.
- [Golovanov, 1997] GOLOVANOV, C. (1997). *Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Golovanov *et al.*, 1998] GOLOVANOV, C., COULOMB, J.-L., MARÉCHAL, Y. et MEUNIER, G. (1998). 3d mesh connection techniques applied to movement simulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3359–3362.
- [Goudier, 2013] GOUDIER, P. (2013). Formation systèmes motorisés. <http://metiersde-leau.hol.es/clicker>
- [Gradinaru et Hiptmair, 1999] GRADINARU, V. et HIPTMAIR, R. (1999). Whitney elements on pyramids. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 8:154–168.
- [Journeaux, 2013] JOURNEAUX, A. (2013). *Modélisation multi-physique en génie électrique Application au couplage magnéto-thermo-mécanique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud Ecole doctorale STITS.
- [Kameari et Koganezawa, 1997] KAMEARI, A. et KOGANEZAWA, K. (1997). Convergence of iccg method in fem using edge elements without gauge condition. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1223–1226.
- [Kawase *et al.*, 1995] KAWASE, Y., YAMAGUCHI, T. et HAYASHI, Y. (1995). Analysis of cogging torque of permanent magnet motor by 3-d finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):2044–2047.
- [Krebs *et al.*, 2009] KREBS, G., CLÉNET, S., ABAKAR, A., LOCMONT, F. et PIRIOU, F. (2009). Method to connect nonconforming mesh in 3-d with the overlapping method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1420–1423.
- [Krebs *et al.*, 2010] KREBS, G., CLÉNET, S. et TSUKERMAN, I. A. (2010). Overlapping finite elements for arbitrary surfaces in 3-d. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):3473–3476.
- [Krebs *et al.*, 2011] KREBS, G., HENNERON, T., CLÉNET, S. et LE BIHAN, Y. (2011). Overlapping finite elements used to connect non-conforming meshes in 3-d with a vector potential formulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5):1218–1221.
- [Kurz *et al.*, 1998] KURZ, S., FETZER, J., LEHNER, G. et RUCKER, W. M. (1998). A novel formulation for 3d eddy current problems with moving bodies using a lagrangian description and bem-fem coupling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3068–3073.
- [Lai *et al.*, 1992] LAI, H., RODGER, D. et LEONARD, P. (1992). Coupling meshes in 3d problems involving movements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1732–1734.
- [Le Floch, 2002] LE FLOCH, Y. (2002). *Développement de formulations 3D éléments finis $T\phi$ pour la prise en compte de conducteurs massifs et bobinés avec un couplage circuit*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble - Ecole Doctorale Electrotechnique Automatique Télécommunications Signal.

- [Leconte, 2000] LÉCONTE, V. (2000). *Simulation des convertisseurs électromécaniques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble - Ecole Doctorale Electrotechnique Automatique Télécommunications Signal.
- [Lee et al., 1991] LEE, K.-s., DEBORTOLI, M. J., LEE, M. J. et SALON, S. J. (1991). Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(5):3955–3957.
- [Lepaul et al., 1999] LEPAUL, S., SYKULSKI, J., BIDDLECOMBE, C., JAY, A. et SIMKIN, J. (1999). Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1602–1605.
- [Maréchal, 1991] MARÉCHAL, Y. (1991). *Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec terme de transport. Application aux ralentisseurs électromagnétiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Maréchal et al., 1992] MARÉCHAL, Y., MEUNIER, G., COULOMB, J.-L. et MAGNIN, H. (1992). A general purpose tool for restoring inter-element continuity. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1728–1731.
- [Meunier et al., 1986] MEUNIER, G., COULOMB, J.-L., SALON, S. et KRÄENBÜHL, L. (1986). Hybrid finite element boundary element solutions for three dimensional scalar potential problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 22(5):1040–1042.
- [Multon et al., 2000] MULTON, B., BEN AHMED, H., BERNARD, N. et CAVAREC, P.-E. (2000). Les moteurs électriques pour applications de grande série. *La Revue 3E.I.*, 21:5–18.
- [Nedelec, 1980] NEDELEC (1980). Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerical Mathematics*, 35.
- [Perrat, 2010] PERRAT, A. (2010). Efficacité énergétique des machines : le choix judicieux de la motorisation. White paper, Schneider Electric.
- [Perrin-Bit, 1994] PERRIN-BIT, R. (1994). *Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : Calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Perrin-Bit et Coulomb, 1995] PERRIN-BIT, R. et COULOMB, J.-L. (1995). A three dimensional finite element mesh connection for problems involving movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1920–1923.
- [Phung, 2006] PHUNG, A. T. (2006). *Développement de formulations électromagnétiques éléments finis 3D pour la modélisation des dispositifs en fréquence élevée*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Preis et al., 1992] PREIS, K., BARDI, I., BIRO, O., MAGELE, C., VRISK, G. et RICHTER, K. (1992). Different finite element formulations of 3d magnetostatic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1056–1059.
- [Preston et al., 1988] PRESTON, T. W., REECE, A. B. J. et SANGHA, P. S. (1988). Induction motor analysis by time-stepping techniques. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):471–474.
- [Rapetti, 2000] RAPETTI, F. (2000). *Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints*. Thèse de doctorat, Université Paris 6 Spécialité : Mathématiques Appliquées.
- [Rapetti, 2001] RAPETTI, F. (2001). The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures. *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, 14(6):457–477.

- [Rapetti *et al.*, 2000a] RAPETTI, F., BOUILLAUT, F., SANTANDREA, L., BUFFA, A., MADAY, Y. et RAZEK, A. (2000a). Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1351–1355.
- [Rapetti *et al.*, 2002] RAPETTI, F., MADAY, Y., BOUILLAUT, F. et RAZEK, A. (2002). Eddy-current calculations in three-dimensional moving structures. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):613–616.
- [Rapetti *et al.*, 2000b] RAPETTI, F., SANTANDREA, L., BOUILLAUT, F. et RAZEK, A. (2000b). Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids. *International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 19(1):10–29.
- [Ratnajeevan et Hoole, 1985] RATNAJEEVAN, S. et HOOLE, H. (1985). Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6):2292–2295.
- [Raviart et Thomas, 1977] RAVIART et THOMAS (1977). *A mixed finite element method for second order elliptic problems*. Lecture Notes in Mathematics 606.
- [Ren, 1996] REN, Z. (1996). Influence of the rhs on the convergence behaviour of the curl-curl equation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):655–658.
- [Ren, 1997] REN, Z. (1997). *Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Paris Sud.
- [Rodger *et al.*, 1994] RODGER, D., ALLEN, N., LAI, H. et LEONARD, P. (1994). Calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media - verification using a rotational test rig. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5):2988–2991.
- [Rodger et Eastham, 1987] RODGER, D. et EASTHAM, J. (1987). Multiply connected regions in the $a - \psi$ dimensional eddy-current formulation. *IEE Proceedings*, 134(1):58–66.
- [Rodger *et al.*, 1990] RODGER, D., LAI, H. et LEONARD, P. (1990). Coupled elements for problems involving movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):548–550.
- [Sadowski *et al.*, 1992] SADOWSKI, N., LEFÈVRE, Y., LAJOIE-MAZENC, M. et CROS, J. (1992). Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1410–1413.
- [Shi, 2005] SHI, X. (2005). *Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliquée à la Modélisation des machines électriques*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [Shi *et al.*, 2006] SHI, X., LE MENACH, Y., DUCREUX, J.-P. et PIRIOU, F. (2006). A hybrid movement method to model electrical machines with end winding in 3d finite element method. *In 2006 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, page 12.
- [Shi *et al.*, 2008] SHI, X., LE MENACH, Y., DUCREUX, J.-P. et PIRIOU, F. (2008). Comparison between the mortar element method and the polynomial interpolation method to model movement in the finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6):1314–1317.
- [Tsukerman, 1992] TSUKERMAN, I. A. (1992). Overlapping finite elements for problems with movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(5):2247–2249.
- [Urankar, 1980] URANKAR, L. (1980). Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part i : Filament approximation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 16(5):1283–1288.
- [Urankar, 1982a] URANKAR, L. (1982a). Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part ii : Thin sheet approximation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(3):911–917.

- [Urankar, 1982b] URANKAR, L. (1982b). Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part iii : Exact computation for rectangular cross section. *IEEE Transactions on Magnetism*, 18(6):1860–1867.
- [Vassallo, 1980] VASSALLO, C. (1980). *Electromagnétisme classique dans la matière*. Dunod, Paris.
- [Vassent, 1990] VASSENT, E. (1990). *Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, INP Grenoble.
- [Vassent, 1991] VASSENT, E. (1991). Simulation of induction machine operation using a step by step finite element method coupled with circuits and mechanical equations. *IEEE Transactions on Magnetism*, 27(6):5232–5234.
- [Vérité, 1987] VÉRITÉ, J. (1987). Calculation of multivalued potentials in exterior regions. *IEEE Transactions on Magnetism*, 23(3):1881–1887.
- [Wang et al., 2013] WANG, Z., HENNERON, T., NEMITZ, N., MIPO, J.-C. et PIRIOU, F. (2013). Electromagnetic field projection on finite element overlapping domains. *IEEE Transactions on Magnetism*, 49(4):1290–1298.
- [Webb, 1993] WEBB, J. P. (1993). Edge elements and what they can do for you. *IEEE Transactions on Magnetism*, 29(2):1460–1465.
- [Xu et Simkin, 2004] XU, E. X. et SIMKIN, J. (2004). Total and reduced magnetic vector potentials and electrical scalar potential for eddy current calculation. *IEEE Transactions on Magnetism*, 40(2):938–940.
- [Zaglmayr, 2006] ZAGLMAYR, S. (2006). *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. Thèse de doctorat, Johannes Kepler Universität Linz.
- [Zaidi, 2012] ZAIDI, H. (2012). *Méthodologies pour la modélisation des couches fines et du déplacement en contrôle non destructif par courants de Foucault : application aux capteurs souples*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI.
- [Zaidi et al., 2012] ZAIDI, H., SANTANDREA, L., KREBS, G., LE BIHAN, Y. et DEMALDENT, E. (2012). Use of overlapping finite elements for connecting arbitrary surfaces with dual formulations. *IEEE Transactions on Magnetism*, 48(2):583–586.
- [Zgainski et al., 1996] ZGAINSKI, F. c.-X., COULOMB, J.-L., MARÉCHAL, Y., CLAEYSSSEN, F. et BRUNOTTE, X. (1996). A new family of finite elements : The pyramidal elements. *IEEE Transactions on magnetism*, 32(3):1393–1396.

Résumé

Les machines électriques sont modélisées pour prédire leurs performances et optimiser leur rendement. Cette modélisation peut être faite par des simulations avec la méthode des éléments finis. En particulier, les machines asynchrones nécessitent des simulations 3D pour prendre en compte les courants de Foucault et les têtes de bobines. Dans le logiciel Flux[®], des formulations 3D basées sur le potentiel scalaire magnétique sont utilisées avec succès depuis de nombreuses années. Néanmoins, des coupures mathématiques artificielles sont nécessaires, lorsque le domaine n'est pas simplement connexe.

Afin de se libérer de ces contraintes de connexité, des formulations en potentiel vecteur magnétique ont été étudiées et développées. En 3D, leur mise en œuvre nécessite l'utilisation d'éléments finis d'arête afin de respecter la nature des champs. Avec les éléments d'arête, les formulations sont généralement résolues avec une condition de jauge pour les solveurs directs comme pour les solveurs itératifs. De nouvelles formulations en potentiel vecteur magnétique auto-jaugées ont été développées permettant la prise en compte des bobines maillées et des bobines non maillées. La prise en compte du mouvement est relativement simple à mettre en œuvre pour les formulations en potentiel scalaire magnétique avec l'interpolation nodale. Avec les éléments d'arête, l'interpolation est plus délicate. C'est pourquoi la méthode des éléments avec joints a été développée pour prendre en compte le mouvement dans un cas général.

Mots clés : *3D, Éléments finis, Formulations en potentiel vecteur magnétique, Machine asynchrone, Maillage non-conforme, Mouvement, Termes sources*

Abstract

Electric machines are modeled in order to predict their performance and to optimize their output. This modeling can be done by simulation with the finite element method. In particular, induction machines require 3D simulation to take into account eddy currents and coils overhangs. In the Flux[®] software, 3D formulations based on magnetic scalar potential has been used with success for many years. Nevertheless, artificial mathematical cuts are necessary, when the domain is not simply connected.

In order to avoid connection constraints, magnetic vector potential formulations have been studied and developed. In 3D, their implementation requires the use of edge elements to respect the nature of fields. With edge elements, formulations are generally solved with a gauge condition for direct solvers as well as for iterative solvers. New auto-gauged magnetic vector potential formulations have been developed to take into account meshed coils and non-meshed coils. Consideration of movement is relatively simple to implement for magnetic scalar potential formulations with nodal interpolation. With edge elements, the interpolation is more delicate. For this reason, the mortar method has been developed to take into account movement in a general case.

Keywords: *3D, Finite elements, Induction machine, Magnetic vector potential formulations, Movement, Non-matching mesh, Source terms*